Серия «Математика»
2014. Т. 9. С. 118—133

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 510.67

О существовании предельных моделей над последовательностью типов *

С. В. Судоплатов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются предельные модели, т. е. счетные модели, которые представляются в виде объединения элементарных цепей простых моделей над конечными множествами, но не изоморфные никакой простой модели над конечным множеством. Любая счетная модель малой теории (т. е. теории со счетным числом типов) является либо простой над некоторым кортежем, либо предельна. При этом любая предельная модель является либо предельной над типом, т. е. представляется в виде объединения элементарной цепи попарно изоморфных простых моделей над реализациями некоторого фиксированного типа, либо предельна над некоторой последовательностью попарно различных типов, над которыми простые модели не изоморфны.

В работе охарактеризовано свойство существования предельной модели над последовательностью типов в терминах отношений изолированности и полуизолированности: показано, что существует предельная модель над последовательностью типов тогда и только тогда, когда имеется бесконечно много несимметричным переходов между типами по отношению изолированности или, что эквивалентно, по отношению полуизолированности. Эти критерии обобщают соответствующие критерии для предельных моделей над типом. В терминах отношений изолированности и полуизолированности охарактеризовано условие существования предельной модели над подпоследовательностью данной последовательности типов. Доказано, что если теория имеет предельную модель над типом, то ранг Морли этой теории бесконечен. При этом некоторое ограничение теории на подходящую конечную сигнатуру имеет бесконечный ранг Морли. Приведенная оценка является точной: существует ω-стабильная теория, имеющая предельную модель над типом и ранг Морли ω.

Ключевые слова: предельная модель, последовательность типов, ранг Морли.

Известно [1]–[3], что любая счетная модель малой теории T либо проста над некоторым кортежем, либо предельна, т. е. не проста ни над каким кортежем и представляется в виде объединения счетной элементарной цепи простых моделей над кортежами. Если предельная модель

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 12–01–00460.

$\mathcal{M}$ составлена из простых моделей над одним и тем же типом p, то $\mathcal{M}$ называется *предельной над* p.

В [1]–[4] приведены критерии существования предельных моделей над типами. В настоящей работе (§ 2) мы представляем их обобщения для последовательностей типов.

Как показано в [1; 2] на основе работы [5], любая счетная теория минимального ранга Морли и минимальной степени (т. е. любая счетная сильно минимальная теория) либо счетно категорична (имеет единственную, с точностью до изоморфизма, счетную модель), либо l-категорична (имеет единственную, с точностью до изоморфизма, предельную модель) и не может иметь предельных моделей над типами, поскольку различные конечные размерности моделей влекут простоту над разными типами. В то же время, обобщая пример свободной ориентированной псевдоплоскости с упорядоченной раскраской, построенный независимо А. Пилаем [6] и автором [1; 7], в работе [8] было показано, что класс ω-стабильных теорий ранга Морли ω включает теории с произвольным конечным, счетным или континуальным числом предельных моделей над типом.

В § 3 мы приводим отрицательный ответ на вопрос о существовании предельных моделей над типом для класса теорий с конечным рангом Морли. А именно, доказывается, что ранг Морли любой теории, имеющей предельную модель над типом, имеет значение не меньше ω.

1. Предварительные сведения

Пусть T — малая теория, т.е. полная элементарная теория со счетным множеством $S(T)$ типов над $\varnothing$. Для любого типа $p(\bar{x}) \in S(T)$ и его реализации $\bar{a}$ существует простая модель $\mathcal{M}(\bar{a})$ над $\bar{a}$. Поскольку все простые модели над реализациями типа p изоморфны, эти модели будем обозначать через $\mathcal{M}_p$.

Следуя [1]–[4], модель $\mathcal{M}$ теории T называется *предельной* (соответственно *предельной над типом* p), если $\mathcal{M}$ не является простой моделью теории T ни над каким кортежем и $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}(\bar{a}_n)$, где $(\mathcal{M}(\bar{a}_n))_{n\in\omega}$ — элементарная цепь простых моделей над кортежами $\bar{a}_n$ (и $\mathcal{M} \models p(\bar{a}_n)$), $n \in \omega$.

Предельная модель $\mathcal{M}$ называется *предельной над последовательностью типов* $\mathbf{q}$ или $\mathbf{q}$-*предельной*, где $\mathbf{q} = (q_n)_{n\in\omega}$, $q_n \in S(T)$, если $\models q_n(\bar{a}_n)$, $n \in \omega$.

Таким образом, предельная модель над типом p является предельной над последовательностью $(q_n)_{n\in\omega}$, где все типы q_n совпадают с типом p.

Определение 1. [9]. *Пусть $\mathcal{M}$ — модель теории T, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — кортежи из $\mathcal{M}$, A — подмножество в M. Говорят, что кортеж $\bar{a}$* полуизолирует *кортеж* $\bar{b}$ *над множеством* A*, если существует формула* $\varphi(\bar{a},\bar{y}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}/A\bar{a})$ *такая, что* $\varphi(\bar{a},\bar{y}) \vdash \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$*. При этом говорят, что формула* $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ *(с параметрами из множества* A*)* свидетельствует о полуизолированности $\bar{b}$ *над* $\bar{a}$ *относительно множества* A*.*

Аналогично [3] говорят, что кортеж $\bar{a}$ *изолирует* кортеж $\bar{b}$ над множеством A, если существует формула $\varphi(\bar{a},\bar{y}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}/A\bar{a})$ такая, что $\varphi(\bar{a},\bar{y}) \vdash \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ и $\varphi(\bar{a},\bar{y})$ — главная (т. е. изолирующая) формула над $A\bar{a}$, т. е. в сигнатуре с константами из $A\bar{a}$. При этом говорят, что формула $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ (с параметрами из множества A) *свидетельствует о изолированности* $\bar{b}$ над $\bar{a}$ относительно множества A.

Если $\bar{a}$ (полу)изолирует $\bar{b}$ над $\varnothing$, то просто говорим, что $\bar{a}$ (*полуизолирует*) $\bar{b}$, а о формуле $\varphi(\bar{a},\bar{y})$, свидетельствующей о (полу)изолированности $\bar{b}$ над $\bar{a}$ относительно $\varnothing$, говорим, что $\varphi(\bar{a},\bar{y})$ *свидетельствует о* (*полу*)*изолированности* $\bar{b}$ *над* $\bar{a}$.

Если $p \in S(T)$, то через SI_p (в модели $\mathcal{M}$) обозначим отношение полуизолированности (над $\varnothing$) на множестве реализаций типа p:

$$\mathrm{SI}_p \rightleftharpoons \{(\bar{a},\bar{b}) \mid \mathcal{M} \models p(\bar{a}) \wedge p(\bar{b}) \text{ и } \bar{a} \text{ полуизолирует } \bar{b}\}.$$

Аналогично через I_p (в модели $\mathcal{M}$) обозначается отношение изолированности (над $\varnothing$) на множестве реализаций типа p:

$$I_p \rightleftharpoons \{(\bar{a},\bar{b}) \mid \mathcal{M} \models p(\bar{a}) \wedge p(\bar{b}) \text{ и } \bar{a} \text{ изолирует } \bar{b}\}.$$

Как показано в [9], отношение SI_p является предпорядком, в то время как I_p может не быть предпорядком.

Следующие утверждения представляют критерии существования предельных моделей над типами.

Предложение 1. [1; 3; 4]. *Малая теория* T *имеет предельную модель над типом* $p \in S(T)$ *тогда и только тогда, когда для любой* (*некоторой*) *реализации* $\bar{a}$ *типа* p *существует реализация* $\bar{b}$ *типа* p *в модели* $\mathcal{M}(\bar{a})$ *и кортеж* $\bar{c} \in M(\bar{a})$ *такие, что* $\mathrm{tp}(\bar{c}/\bar{b})$ — *неглавный тип.*

Теорема 1. [3; 10]. *Пусть* $p(\bar{x})$ — *полный тип малой теории* T*. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует предельная модель над типом* p*;*

(2) *отношение* I_p *на множестве реализаций типа* p *в некоторой* (*любой*) *модели* $\mathcal{M} \models T$*, реализующей тип* p*, несимметрично;*

(3) *в некоторой* (*любой*) *модели* $\mathcal{M} \models T$*, реализующей тип* p*, найдутся такие реализации* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *типа* p *в* $\mathcal{M}$*, что* $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ — *главный тип и* $\bar{b}$ *не полуизолирует* $\bar{a}$ *и, в частности, отношение полуизолированности* SI_p *несимметрично на множестве реализаций типа* p *в* $\mathcal{M}$*.*

Определение 2. [1; 4; 11]. *Пусть p и q — типы из $S(T)$. Будем говорить, что тип p* подчиняется *типу q, или p* не превосходит q по предпорядку Рудин–Кейслера *и писать $p \le_{\mathrm{RK}} q$, если $\mathcal{M}_q \models p$, т. е. модель $\mathcal{M}_p$ является элементарной подмоделью модели $\mathcal{M}_q$: $\mathcal{M}_p \preceq \mathcal{M}_q$. При этом будем также говорить, что модель $\mathcal{M}_p$ подчиняется модели $\mathcal{M}_q$, или $\mathcal{M}_p$ не превосходит модели $\mathcal{M}_q$ по предпорядку Рудин–Кейслера и писать $\mathcal{M}_p \le_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$.*

Синтаксически условие $p \le_{\mathrm{RK}} q$ (а, значит, и условие $\mathcal{M}_p \le_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$) записывается так: существует формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что совместно множество $q(\bar{y}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{y})\}$ и выполняется $q(\bar{y}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{y})\} \vdash p(\bar{x})$. Более того, в силу малости теории (поскольку число типов над любым кортежем $\bar{a}$ счетно и, значит, любая совместная формула с параметрами из $\bar{a}$ выводится из некоторой главной формулы с параметрами из $\bar{a}$) формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ может быть выбрана так, что для любой формулы $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ из совместности множества $q(\bar{y}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y})\}$ следует $q(\bar{y}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{y})\} \vdash \psi(\bar{x}, \bar{y})$. При этом формулу $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ будем называть *(q, p)-главной*.

Определение 3. [1; 4; 11]. *Типы p и q называются взаимоподчиняемыми, взаимореализуемыми, эквивалентными по Рудин–Кейслеру или* RK*-эквивалентными (обозначается $p \sim_{\mathrm{RK}} q$), если $p \le_{\mathrm{RK}} q$ и $q \le_{\mathrm{RK}} p$. При этом модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ также называются взаимоподчиняемыми, эквивалентными по Рудин–Кейслеру или* RK*-эквивалентными (обозначается $\mathcal{M}_p \sim_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$).*

Следуя [13], типы p и q называются *сильно взаимоподчиняемыми*, *сильно взаимореализуемыми*, *сильно эквивалентными по Рудин–Кейслеру* или сильно RK-*эквивалентными* (обозначается $p \equiv_{\mathrm{RK}} q$), если для некоторых реализаций $\bar{a}$ и $\bar{b}$ типов p и q соответственно типы $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ и $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{b})$ являются главными. При этом модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ также называются *сильно взаимоподчиняемыми*, *сильно эквивалентными по Рудин–Кейслеру* или *сильно* RK-*эквивалентными* (обозначается $\mathcal{M}_p \equiv_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$).

Очевидно, что отношения подчинения суть предпорядки, а отношения (сильной) взаимоподчиняемости являются отношениями эквивалентности. При этом из $\mathcal{M}_p \equiv_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$ следует $\mathcal{M}_p \sim_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$.

Ясно, что невзаимоподчиняемые модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ неизоморфны. Кроме того неизоморфные модели могут найтись и среди взаимоподчиняемых.

Синтаксическая характеризация изоморфизма моделей $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ дается следующим предложением, согласно которому наличие изоморфизма между $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ равносильно сильной взаимоподчиняемости этих моделей.

Предложение 2. [1; 4; 11; 13]. *Для любых типов $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ малой теории T следующие условия эквивалентны:*

(1) *модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ изоморфны;*

(2) *модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ сильно взаимоподчиняемы;*

(3) *существуют соответственно (p,q)-главная формула $\varphi_{p,q}(\bar{y},\bar{x})$ и (q,p)-главная формула $\varphi_{q,p}(\bar{x},\bar{y})$ такие, что совместно множество*

$$p(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \cup \{\varphi_{p,q}(\bar{y},\bar{x}), \varphi_{q,p}(\bar{x},\bar{y})\};$$

(4) *существует одновременно (p,q)-главная и (q,p)-главная формула $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ такая, что совместно множество*

$$p(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \cup \{\varphi(\bar{x},\bar{y})\}.$$

Будем говорить, что тип $q(\bar{x})$ (не обязательно полный) над множеством A *изолируется* множеством $\Phi(\bar{x},A)$ формул из q, если $\Phi(\bar{x},A) \vdash q(\bar{x})$.

Рассмотрим неглавные типы $p(\bar{x}), q(\bar{y}) \in S(A)$ над не более чем счетным множеством A, реализующиеся в счетной модели $\mathcal{M}$ счетной теории T. Свяжем с этими типами изолирующие множества $\Theta(\bar{x}) \subset p(\bar{x})$ и $\Theta'(\bar{y}) \subset q(\bar{y})$ формул $\theta_n(\bar{x})$ и $\theta'_n(\bar{y})$ соответственно, $n \in \omega$, таких, что выполняются следующие условия:

1) $\models \forall \bar{x}\, \theta_0(\bar{x}) \wedge \forall \bar{y}\, \theta'_0(\bar{y})$;

2) $\models \forall \bar{x}(\theta_{n+1}(\bar{x}) \to \theta_n(\bar{x})) \wedge \exists \bar{x}(\theta_n(\bar{x}) \wedge \neg\theta_{n+1}(\bar{x}))$;

3) $\models \forall \bar{y}(\theta'_{n+1}(\bar{y}) \to \theta'_n(\bar{y})) \wedge \exists \bar{y}(\theta'_n(\bar{y}) \wedge \neg\theta'_{n+1}(\bar{y}))$.

Существование таких изолирующих множеств формул вытекает из счетности числа формул с параметрами из множества A. Действительно, занумеруем все формулы, принадлежащие, например, типу $p(\bar{x})$: φ_n, $n \in \omega$. Для каждого $n \in \omega$ обозначим через ψ_n формулу $\bigwedge\limits_{i<n} \varphi_i$, считая $\psi_0 = (\bar{x} \approx \bar{x})$. Для получения последовательности $(\theta_n(\bar{x}))_{n\in\omega}$ остается из последовательности формул ψ_n удалить формулы, эквивалентные некоторым своим предшественникам.

В случае, когда $p = q$, будем считать, что $\theta_n = \theta'_n$, $n \in \omega$.

Будем называть формулу θ_n *n-окрестностью* типа p, а формулу θ'_n — *n-окрестностью типа* q. Будем говорить, что кортеж $\bar{a}$ (соответственно $\bar{b}$) *имеет цвет* n, если $\mathcal{M} \models \theta_n(\bar{a}) \wedge \neg\theta_{n+1}(\bar{a})$ ($\mathcal{M} \models \theta'_n(\bar{b}) \wedge \neg\theta'_{n+1}(\bar{b})$). О реализациях типов p и q будем говорить, что они имеют *бесконечный цвет* ∞. При этом предполагается, что $n < \infty$ для любого $n \in \omega$.

Предложение 3. [3]. *Для любых неглавных типов $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ из $S(A)$, реализующихся в счетной модели $\mathcal{M}$ счетной теории T кортежами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ соответственно, а также для любой формулы $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ с параметрами из A, удовлетворяющей условию $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a},\bar{b})$, формула $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ свидетельствует о полуизолированности $\bar{b}$ над $\bar{a}$ относительно множества A тогда и только тогда, когда для любого $n' \in \omega$*

существует $n \in \omega$ такое, что для любого кортежа $\bar{a}_n$ с условием $\mathcal{M} \models \theta_n(\bar{a}_n)$ (т. е. имеющего цвет $\geq n$) любая реализация формулы $\varphi(\bar{a}_n, \bar{y})$ в модели $\mathcal{M}$ удовлетворяет $\theta'_{n'}(\bar{y})$ (т. е. имеет цвет $\geq n'$).

Следствие 1. [3]. *Для любых неглавных типов $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ из $S(A)$, реализующиеся в счетной модели $\mathcal{M}$ счетной теории T кортежами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ соответственно, а также для любой формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ с параметрами из A, удовлетворяющей условию $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$, следующие условия эквивалентны:*

1) *формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ свидетельствует о полуизолированности $\bar{b}$ над $\bar{a}$ относительно множества A, но не может свидетельствовать о полуизолированности $\bar{a}$ над $\bar{b}$ относительно множества A;*

2) *выполняются следующие свойства:*

а) *для любого $n' \in \omega$ существует $n \in \omega$ такое, что для любого кортежа $\bar{a}_n$ цвета $\geq n$ с условием $\mathcal{M} \models \theta_n(\bar{a}_n)$ любая реализация формулы $\varphi(\bar{a}_n, \bar{y})$ в модели $\mathcal{M}$ удовлетворяет $\theta'_{n'}(\bar{y})$;*

б) *существуют такое $n \in \omega$, что для любого $n' \in \omega$ найдутся кортежи $\bar{a}_n$ и $\bar{b}_{n'}$ конечных цветов $< n$ и $\geq n'$ соответственно с условием $\models \theta_0(\bar{a}_n) \wedge \theta'_{n'}(\bar{b}_{n'})$ такие, что $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_n, \bar{b}_{n'})$.*

2. Критерии существования предельных моделей над последовательностью типов

Любая $\leq_{\mathrm{RK}}$-*последовательность*, т. е. последовательность $\mathbf{q}$ неглавных типов q_n, $n \in \omega$, с условиями $q_n \leq_{\mathrm{RK}} q_{n+1}$, $n \in \omega$, определяет число $I_l(\mathbf{q}) \in \omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$ попарно неизоморфных предельных моделей $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n \in \omega} \mathcal{M}_{q_n}$ над $\mathbf{q}$.

Если все типы q_n, за исключением может быть конечного их числа, равны типу p, то любая предельная модель над $\mathbf{q}$ предельна над p и наоборот. В этом случае число $I_l(\mathbf{q})$ обозначается через $I_l(p)$.

Ниже мы опишем необходимые и достаточные условия для существования предельных моделей над $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $\mathbf{q}$ ($I_l(\mathbf{q}) \geq 1$), подобные условиям существования предельных моделей над типом, представленным в предложении 1 и в теореме 1.

Лемма 1. *Если для кортежей $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ типы $\mathrm{tp}(\bar{a}\bar{b}/\bar{c})$ и $\mathrm{tp}(\bar{c}/\bar{a})$ являются главными, то $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ — главный тип.*

Доказательство. По условию существуют главные формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ и $\psi(\bar{a}, \bar{z})$, для которых $\models \varphi(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \wedge \psi(\bar{a}, \bar{c})$. Рассмотрим формулу

$$\chi(\bar{a}, \bar{y}) \rightleftharpoons \exists \bar{z}\, (\varphi(\bar{a}, \bar{y}, \bar{z}) \wedge \psi(\bar{a}, \bar{z})).$$

Очевидно, что $\chi(\bar{a},\bar{y}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$. Достаточно показать, что $\chi(\bar{a},\bar{y})$ — главная формула.

Действительно, пусть $\bar{b}'$ и $\bar{b}''$ — кортежи, для которых выполняется $\models \chi(\bar{a},\bar{b}') \wedge \chi(\bar{a},\bar{b}'')$. Возьмем кортежи $\bar{c}'$ и $\bar{c}''$ с условием $\models \varphi(\bar{a},\bar{b}',\bar{c}') \wedge \psi(\bar{a},\bar{c}') \wedge \varphi(\bar{a},\bar{b}'',\bar{c}'') \wedge \psi(\bar{a},\bar{c}'')$. Так как формула $\psi(\bar{a},\bar{z})$ является главной, существует автоморфизм f, фиксирующий $\bar{a}$ и переводящий $\bar{c}'$ в $\bar{c}''$. Поскольку формула $\varphi(\bar{a},\bar{y},\bar{c}'')$ является главной и удовлетворяет $\models \varphi(\bar{a},f(\bar{b}'),\bar{c}'') \wedge \varphi(\bar{a},\bar{b}'',\bar{c}'')$, существует автоморфизм g, фиксирующий кортежи $\bar{a}$, $\bar{c}''$ и переводящий $f(\bar{b}')$ в $\bar{b}''$. Тогда $\bar{a}$-автоморфизм $f \circ g$ переводит $\bar{b}'$ в $\bar{b}''$. Таким образом, формула $\chi(\bar{a},\bar{y})$ является главной и тип $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ изолирован. □

Предложение 4. *Малая теория T имеет предельную модель над $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $\mathbf{q} = (q_n)_{n\in\omega}$ типов из $S(T)$ тогда и только тогда, когда существует элементарная цепь $(\mathcal{M}(\bar{a}_n))_{n\in\omega}$, где $\models q_n(\bar{a}_n)$, $n \in \omega$, такая, что для любого $k \in \omega$ существуют $l, m \in \omega$, $k < l < m$, а также кортеж $\bar{b}_m \in M(\bar{a}_m)$, для которых $\mathrm{tp}(\bar{b}_m/\bar{a}_l)$ — неглавный тип. При этом модель $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}(\bar{a}_n)$ является предельной над $\mathbf{q}$.*

Доказательство. Предположим, что существует предельная модель $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$ теории T над $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $\mathbf{q}$, где $\mathcal{M}_n \simeq \mathcal{M}_{q_n}$, $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}(\bar{a}_n)$, $\models q_n(\bar{a}_n)$, и существует $k \in \omega$ такое, что для любых $l, m \in \omega$, $k < l < m$, и $\bar{b}_m \in M_m$ тип $\mathrm{tp}(\bar{b}_m/\bar{a}_l)$ является главным. Тогда в моделях $\mathcal{M}_m$ (и, следовательно, в модели $\mathcal{M}$) реализуются лишь главные типы кортежей над $\bar{a}_l$, лежащих в $\mathcal{M}_m$ (in $\mathcal{M}$). Следовательно, модель $\mathcal{M}$ проста над реализацией типа q_l, что противоречит предположению о предельности модели $\mathcal{M}$.

Обратно, допустим, что существует элементарная цепь $(\mathcal{M}(\bar{a}_n))_{n\in\omega}$, где $\models q_n(\bar{a}_n)$, $n \in \omega$, такая, что для любого $k \in \omega$ существуют $l, m \in \omega$, $k < l < m$, а также кортеж $\bar{b}_m \in M(\bar{a}_m)$, для которых $\mathrm{tp}(\bar{b}_m/\bar{a}_l)$ — неглавный тип. Покажем, что модель $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}(\bar{a}_n)$ не изоморфна моделям $\mathcal{M}_r$, $r \in S(\varnothing)$. Достаточно доказать, что модели $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_{q_k}$ неизоморфны, поскольку если $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\bar{c})$ для некоторого кортежа $\bar{c}$ и $\bar{c} \in M(\bar{a}_k)$, то существует формула $\varphi(\bar{x},\bar{y})$, для которой выполняется $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{c},\bar{a}_k)$, формулы $\varphi(\bar{c},\bar{y})$, $\varphi(\bar{x},\bar{a}_k)$ являются главными и поэтому $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\bar{a}) \simeq \mathcal{M}(\bar{a}_k) = \mathcal{M}_{q_k}$ по предложению 2.

Предположив, что $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_{q_k}$, найдём кортеж $\bar{c} \in q_k(\mathcal{M}(\bar{a}_k))$ такой, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\bar{c})$. По построению модели $\mathcal{M}$ существуют $l, m \in \omega$, $k < l < m$, такие, что $\mathcal{M}(\bar{a}_m)$ содержит некоторый кортеж $\bar{b}$, для которого тип $s(\bar{x},\bar{a}_l) \rightleftharpoons \mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a}_l)$ является неглавным. Вместе с тем в силу $\bar{a}_l, \bar{b} \in M(\bar{a}_k)$ и $\bar{a}_k \in M(\bar{a}_l)$ типы $\mathrm{tp}(\bar{a}_l\bar{b}/\bar{a}_k)$ и $\mathrm{tp}(\bar{a}_k/\bar{a}_l)$ являются главными. Тогда по лемме 1 тип $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a}_l)$ также является главным вопреки предположению. Полученное противоречие показывает, что модель $\mathcal{M}$ является предельной над $\mathbf{q}$. $\square$

Следствие 2. *Если $\mathbf{q}$ — $\leq_{\rm RK}$-последовательность типов q_n, $n \in \omega$, и $(\mathcal{M}_{q_n})_{n\in\omega}$ — элементарная цепь, никакая коконечная подцепь которой не состоит из попарно изоморфных моделей, то $I_l(\mathbf{q}) \geq 1$.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}_n$ — реализации типов q_n, для которых $\mathcal{M}_{q_n} = \mathcal{M}(\bar{a}_n)$, $n \in \omega$. Рассмотрим произвольную модель $\mathcal{M}(\bar{a}_k)$. Так как никакая коконечная подцепь цепи $(\mathcal{M}_{q_n})_{n\in\omega}$ которой не состоит из попарно изоморфных моделей, существует $n > k$ с условиями $\mathcal{M}(\bar{a}_n) \preccurlyeq \mathcal{M}(\bar{a}_{n+1})$ и $\mathcal{M}(\bar{a}_n) \not\simeq \mathcal{M}(\bar{a}_{n+1})$. Тогда по предложению 2 тип $\mathrm{tp}(\bar{a}_{n+1}/\bar{a}_n)$ является неглавным. Взяв $\bar{a}_l = \bar{a}_n$, $\bar{a}_m = \bar{a}_{n+1}$ и $\bar{b}_m = \bar{a}_{n+1}$, получаем $\bar{b}_m \in M(\bar{a}_m)$ и неглавный тип $\mathrm{tp}(\bar{b}_m/\bar{a}_l)$. Поскольку $k \in \omega$ выбрано произвольно, по предложению 4 справедливо соотношение $I_l(\mathbf{q}) \geq 1$. $\square$

Лемма 2. [12; 13; 14]. *Если кортеж $\bar{a}$ изолирует кортеж $\bar{b}$, но $\bar{b}$ не изолирует $\bar{a}$, то $\bar{b}$ не полуизолирует $\bar{a}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(\bar{a}, \bar{y})$ — главная формула типа $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$. Предположим противное (т. е. $\bar{b}$ полуизолирует $\bar{a}$) и возьмем формулу $\psi(\bar{x}, \bar{b})$, свидетельствующую о полуизолированности $\bar{a}$ над $\bar{b}$. Поскольку тип $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{b})$ не является главным, существует формула $\chi(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что совместны формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \wedge \psi(\bar{x}, \bar{b}) \wedge \chi(\bar{x}, \bar{b})$ и $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \wedge \psi(\bar{x}, \bar{b}) \wedge \neg\chi(\bar{x}, \bar{b})$. При этом обе формулы влекут тип $\mathrm{tp}(\bar{a})$. Следовательно, имеют решения формулы $\varphi(\bar{a}, \bar{y}) \wedge \chi(\bar{a}, \bar{y})$ и $\varphi(\bar{a}, \bar{y}) \wedge \neg\chi(\bar{a}, \bar{y})$. Последнее противоречит тому, что формула $\varphi(\bar{a}, \bar{y})$ является главной. $\square$

Если $p, q \in S(T)$, то через $\mathrm{SI}_{p,q}$ (в модели $\mathcal{M}$) обозначается отношение полуизолированности (над $\varnothing$), связывающее множества реализаций типов p и q:

$$\mathrm{SI}_{p,q} \rightleftharpoons \{(\bar{a}, \bar{b}) \mid \mathcal{M} \models p(\bar{a}) \wedge q(\bar{b}) \text{ и } \bar{a} \text{ полуизолирует } \bar{b}\}.$$

Аналогично обозначим через $I_{p,q}$ (в модели $\mathcal{M}$) отношение изолированности (над $\varnothing$), связывающее множества реализаций типов p и q:

$$I_{p,q} \rightleftharpoons \{(\bar{a}, \bar{b}) \mid \mathcal{M} \models p(\bar{a}) \wedge q(\bar{b}) \text{ и } \bar{a} \text{ изолирует } \bar{b}\}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{q} = (q_n)_{n\in\omega}$ — $\leq_{\rm RK}$-последовательность типов малой теории T. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует предельная модель над последовательностью $\mathbf{q}$;*

(2) *существует бесконечно много $n \in \omega$ таких, что*

$$(I_{q_n, q_{n+1}})^{-1} \neq I_{q_{n+1}, q_n}$$

для некоторой (любой) модели $\mathcal{M} \models T$, *в которой реализуются все типы из* $\mathbf{q}$*;*

(3) *существует бесконечно много* $n \in \omega$ *таких, что для некоторой (любой) модели* $\mathcal{M} \models T$, *реализующей все типы из* $\mathbf{q}$*, и некоторых реализаций* $\bar{a}_n$ *и* $\bar{a}_{n+1}$ *(в* $\mathcal{M}$*) типов* q_n *и* q_{n+1} *соответственно справедливо* $(\bar{a}_{n+1}, \bar{a}_n) \in I_{q_{n+1},q_n}$ *и* $(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) \notin \mathrm{SI}_{q_n,q_{n+1}}$*; в частности,* $(\mathrm{SI}_{q_n,q_{n+1}})^{-1} \neq \mathrm{SI}_{q_{n+1},q_n}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала условия (2) и (3) для *некоторой* модели $\mathcal{M}$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что теория T имеет предельную модель $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}(\bar{a}_n)$, где $(\mathcal{M}(\bar{a}_n))_{n\in\omega}$ — элементарная цепь и $\models q_n(\bar{a}_n)$, $n \in \omega$. Допустим, что имеется лишь конечное число $n \in \omega$, для которых $(I_{q_n,q_{n+1}})^{-1} \neq I_{q_{n+1},q_n}$. Тогда найдётся $n_0 \in \omega$ с условием $(I_{q_n,q_{n+1}})^{-1} = I_{q_{n+1},q_n}$ для всех $n \geq n_0$. В силу транзитивности полуизолированности по лемме 2 справедливо $(\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}) \in I_{q_{n_1},q_{n_2}}$ для любых $n_1, n_2 \geq n_0$.

Рассмотрим существующее по предложению 4 бесконечное множество номеров $m \geq n_0$, а также кортежи $\bar{b}_m \in M(\bar{a}_m)$, удовлетворяющие следующему условию: для любого $k \in \omega$ существуют $l, m \in \omega$, $k < l < m$, такие, что $\mathrm{tp}(\bar{b}_m/\bar{a}_l)$ — неглавный тип. Для любых указанных l, m типы $\mathrm{tp}(\bar{a}_l\bar{b}_m/\bar{a}_m)$ и $\mathrm{tp}(\bar{a}_l/\bar{a}_m)$ являются главными. В силу равенства $(I_{q_m,q_l})^{-1} = I_{q_l,q_m}$ тип $\mathrm{tp}(\bar{a}_m/\bar{a}_l)$ также является главным. Тем самым по лемме 1 тип $\mathrm{tp}(\bar{b}_m/\bar{a}_l)$ является главным вопреки предположению.

Полученное противоречие показывает, что при наличии лишь конечного числа соотношений $(I_{q_n,q_{n+1}})^{-1} \neq I_{q_{n+1},q_n}$ модель $\mathcal{M}$ не может быть предельной над $\mathbf{q}$.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) непосредственно вытекает из леммы 2.

(3) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что существует модель $\mathcal{M} \models T$, реализующая все типы из $\mathbf{q}$ и такая, что имеется бесконечно много $n \in \omega$ с реализациями $\bar{a}_n$ и $\bar{a}_{n+1}$ (в модели $\mathcal{M}$) типов q_n и q_{n+1} соответственно, для которых $(\bar{a}_{n+1}, \bar{a}_n) \in I_{q_{n+1},q_n}$ и $(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) \notin \mathrm{SI}_{q_n,q_{n+1}}$. Рассмотрим элементарную цепь $(\mathcal{M}(\bar{a}'_n))_{n\in\omega}$, для которой $\models q_n(\bar{a}'_n)$, $n \in \omega$, и для всех n из некоторого счётного множества w, $w \subseteq \omega$, выполняется $(\bar{a}'_{n+1}, \bar{a}'_n) \in I_{q_{n+1},q_n}$ и $(\bar{a}'_n, \bar{a}'_{n+1}) \notin \mathrm{SI}_{q_n,q_{n+1}}$. Взяв для $k \in \omega$ значение $l > k$ из w, $m = l+1$, и $\bar{b}_m = \bar{a}'_m$, получаем $\bar{b}_m \in M(\bar{a}'_m)$ и неглавный тип $\mathrm{tp}(\bar{b}_m/\bar{a}'_l)$. По предложению 4 теория T имеет предельную модель над $\mathbf{q}$.

Равносильность указанного в пунктах (2) и (3) существования и всеобщности для моделей, реализующих тип q_{n+1}, следует из того, что рассматриваемые свойства сводятся к моделям $\mathcal{M}_{q_{n+1}}$, которые изоморфны элементарным подмоделям любых моделей, реализующих q_{n+1}. $\square$

С помощью теоремы 2 получаются критерии существования предельных моделей над подпоследовательностями $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательностей.

Следствие 3. *Пусть* $\mathbf{q} = (q_n)_{n\in\omega}$ *—* $\leq_{\mathrm{RK}}$*-последовательность типов малой теории* T*. Следующие условия эквивалентны:*

(1) существует предельная модель над некоторой подпоследовательностью последовательности $\mathbf{q}$*;*

(2) существует бесконечно много пар $(m_k, n_k) \in \omega^2$*,* $m_k < n_k \leq m_{k+1}$*,* $k \in \omega$*, таких, что* $\left(I_{q_{m_k},q_{n_k}}\right)^{-1} \neq I_{q_{n_k},q_{m_k}}$ *для некоторой (любой) модели* $\mathcal{M} \models T$*, реализующей все типы из* $\mathbf{q}$*;*

(3) существует бесконечно много пар $(m_k, n_k) \in \omega^2$*,* $m_k < n_k \leq m_{k+1}$*,* $k \in \omega$*, таких, что для некоторой (любой) модели* $\mathcal{M} \models T$*, реализующей все типы из* $\mathbf{q}$*, и для некоторых реализаций* $\bar{a}_{m_k}$ *и* $\bar{a}_{n_k}$ *(в* $\mathcal{M}$*) типов* q_n *и* q_{n+1} *соответственно справедливо* $(\bar{a}_{n_k}, \bar{a}_{m_k}) \in I_{q_{n_k},q_{m_k}}$ *и* $(\bar{a}_{m_k}, \bar{a}_{n_k}) \notin \mathrm{SI}_{q_{m_k},q_{n_k}}$*; в частности,* $\left(\mathrm{SI}_{q_{m_k},q_{n_k}}\right)^{-1} \neq \mathrm{SI}_{q_{n_k},q_{m_k}}$*.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что существует предельная модель над подпоследовательностью $\mathbf{q}' = (q_{n_l})_{l\in\omega}$ последовательности $\mathbf{q}$. По теореме 2 существует бесконечно много $l \in \omega$ таких, что $\left(I_{q_{n_l},q_{n_{l+1}}}\right)^{-1} \neq I_{q_{n_{l+1}},q_{n_l}}$ для некоторой (любой) модели $\mathcal{M} \models T$, реализующей все типы из $\mathbf{q}'$. Взяв пары (n_l, n_{l+1}), получаем бесконечно много искомых пар (m_k, n_k).

Импликации (2) $\Rightarrow$ (3) и (3) $\Rightarrow$ (1) вытекают непосредственно из теоремы 2. $\square$

Замечание 1. В общем случае условия (1)–(3) теоремы 2 не равносильны условиям (1)–(3) следствия 3.

Действительно, существуют малые теории с типами $p, q, r \in S(\varnothing)$, для которых $(I_{p,q})^{-1} = I_{q,p}$, $(I_{q,r})^{-1} = I_{r,q}$ и найдутся реализации $\bar{a}$ и $\bar{b}$ типов p и r соответственно такие, что $(\bar{b}, \bar{a}) \in I_{r,p}$ и $(\bar{a}, \bar{b}) \notin \mathrm{SI}_{p,r}$. Рассмотрев $\leq_{\mathrm{RK}}$-последовательность $\mathbf{q} = p_0, q_0, r_0, \ldots, p_n, q_n, r_n, \ldots$, где каждая тройка (p_n,q_n,r_n) обладает свойствами, описанными для (p,q,r), получаем, что существует предельная модель над последовательностью $p_0, r_0, \ldots, p_n, r_n, \ldots$ и отсутствует предельная модель над $\mathbf{q}$.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из следствия 2.6 и является его уточнением.

Следствие 4. *Пусть* $\mathbf{q} = (q_n)_{n\in\omega}$ *—* $\leq_{\mathrm{RK}}$*-последовательность типов малой теории* T*,* $\mathbf{q}' = (q_{n_l})_{l\in\omega}$ *— подпоследовательность последовательности* $\mathbf{q}$*. Следующие условия эквивалентны:*

(1) существует предельная модель над $\mathbf{q}'$*;*

(2) существует бесконечно много $l \in \omega$ *таких, что* $\left(I_{q_{n_l},q_{n_{l+1}}}\right)^{-1} \neq I_{q_{n_{l+1}},q_{n_l}}$ *для некоторой (любой) модели* $\mathcal{M} \models T$*, реализующей все типы из* $\mathbf{q}'$ *(или, что равносильно, из* $\mathbf{q}$*);*

(3) *существует бесконечно много* $l \in \omega$ *таких, что для некоторой (любой) модели* $\mathcal{M} \models T$*, реализующей все типы из* $\mathbf{q}'$ *(или, что равносильно, из* $\mathbf{q}$*), и для некоторых реализаций* $\bar{a}_{n_l}$ *и* $\bar{a}_{n_{l+1}}$ *(в* $\mathcal{M}$*) типов* q_{n_l} *и* $q_{n_{l+1}}$ *соответственно справедливо* $(\bar{a}_{n_{l+1}}, \bar{a}_{n_l}) \in I_{q_{n_{l+1}}, q_{n_l}}$ *и* $(\bar{a}_{n_l}, \bar{a}_{n_{l+1}}) \notin \mathrm{SI}_{q_{n_l}, q_{n_{l+1}}}$*; в частности,* $\left(\mathrm{SI}_{q_{n_l}, q_{n_{l+1}}}\right)^{-1} \neq \mathrm{SI}_{q_{n_{l+1}}, q_{n_l}}$.

3. О рангах Морли теорий, имеющих предельные модели над типами

В этом разделе мы докажем, что если $I_l(p) \geq 1$, то $\mathrm{MR}(x \approx x) \geq \omega$.

Теорема 3. *Любая теория с предельной моделью над типом имеет бесконечный ранг Морли.*

Доказательство. Для доказательства зафиксируем теорию T (без ограничения общности ω-стабильную и, следовательно, малую), счётную насыщенную модель $\overline{\mathcal{M}}$ теории T, (неглавный) тип $p(x) \in S(T)$ с условием $I_l(T,p) \geq 1$ и последовательность $(\theta_n(x))_{n\in\omega}$ окрестностей типа $p(x)$.

По теореме 1 отношения I_p и SI_p несимметричны. Из следствия 1 и теоремы компактности вытекает, что некоторой для формулы $\varphi(x,y)$, свидетельствующей о несимметричности I_p (и SI_p), и для последовательности элементов a_n цвета n, $n \in \omega$, существует подпоследовательность $(a_{n_k})_{k\in\omega}$, для которой выполняется $X_k \subset X_{k+1}$, $k \in \omega$, где $X_k \subset \omega$ — множество цветов (некоторых) реализаций формулы $\varphi(x, a_{n_k})$, $k \in \omega$. Более того, множество $X_\omega = \bigcup\limits_{k\in\omega} X_k$ цветов (некоторых) реализаций формулы $\varphi(x, a_\infty)$, где $\models p(a_\infty)$, бесконечно. Заметим также, что количество цветов для реализаций формулы $\varphi(x, a_\infty)$ бесконечно, так как в противном случае, т. е. при наличии конечного множества X_ω таких цветов справедливо

$$\varphi(x, a_\infty) \wedge \theta_0(x) \wedge \bigwedge_{n\in X_\omega} \neg(\theta_n(x) \wedge \neg\theta_{n+1}(x)) \vdash p(x),$$

а это противоречит тому, что формула $\varphi(x,y)$ свидетельствует о несимметричности отношения SI_p.

Поскольку каждая формула $\varphi(x, a_\infty) \wedge \theta_n(x)$ неалгебраична, множество $\varphi(\mathcal{M}, a_\infty) \cap p(\mathcal{M})$ бесконечно. Это означает, что формула $\varphi(x, a_\infty)$ неалгебраична на множестве $p(\mathcal{M})$ и выполняется следующая

Лемма 3. *Ранг Морли формулы* $\varphi(x, a_\infty)$ *на множестве* $p(\mathcal{M})$ *больше либо равен* 1*:* $\mathrm{MR}(p(x) \cup \{\varphi(x, a_\infty)\}) \geq 1$.

Рассмотрим теперь формулы $\varphi^0(x,y) = (x \approx y)$, $\varphi^1(x,y) = \varphi(x,y)$, $\varphi^{m+1}(x,y) = \exists z(\varphi^m(x,z) \wedge \varphi(z,y))$, $m \in \omega \setminus \{0\}$.

В силу транзитивности полуизолированности каждая из формул $\varphi^m(x,y)$, $m \geq 1$, свидетельствует о несимметричности отношения SI_p.

Поскольку теория T ω-стабильна и, следовательно, не имеет свойства строгого порядка, каждая из формул $\psi_{m+1}(x,y) = \varphi^{m+1}(x,y) \wedge \bigwedge\limits_{i \leq m} \neg\varphi^i(x,y)$, $m \in \omega$, совместна и свидетельствует о несимметричности отношения SI_p.

Действительно, по транзитивности полуизолированности достаточно показать, что $\psi_{m+1}(a_\infty, \mathcal{M}) \neq \varnothing$ для всех m. Предположим напротив, что $\psi_{m+1}(a_\infty, \mathcal{M}) = \varnothing$ для некоторого m, т. е. $\varphi^{m+1}(a_\infty, y) \vdash \chi(a_\infty, y)$, где $\chi(x,y) = \bigvee\limits_{i \leq m} \varphi^i(x,y)$. Тогда по предположению для любого $b \in p(\mathcal{M})$, удовлетворяющего $\models \varphi(a_\infty, b)$, получаем $(b, a_\infty) \notin \mathrm{SI}_p$ и $\chi(b,y) \vdash \chi(a_\infty, y)$. Так как $\chi(x,y)$ свидетельствует о том, что b полуизолирует все реализации формулы $\chi(b,y)$, $\models \chi(a_\infty, a_\infty)$ и $(b, a_\infty) \notin \mathrm{SI}_p$, то $\models \exists y(\chi(a_\infty, y) \wedge \neg\chi(b,y))$. Поскольку элементы a_∞ и b реализуют один и тот же тип p, существует последовательность $(c_n)_{n\in\omega}$ реализаций типа p такая, что $\chi(c_i, y) \vdash \chi(c_j, y)$ и $\models \exists y(\chi(c_j, y) \wedge \neg\chi(c_i, y))$, $i < j < \omega$. Это противоречит отсутствию свойства строгого порядка в теории T.

Будем говорить, что копии $\psi_m(x, a_{k,\infty})$, $\models p(a_{k,\infty})$, $k \in \omega$, формулы $\psi_m(x, a_\infty)$ *свидетельствуют о том, что*

$$\mathrm{MR}(p(x) \cup \{\psi_{m+1}(x, a_\infty)\}) \geq m+1,$$

если $\models \varphi(a_{k,\infty}, a_\infty)$ и для определимых множеств

$$D_{m,k} = \psi_m(\mathcal{M}, a_{k,\infty}) \wedge \neg\psi_m(\mathcal{M}, a_\infty),$$

$k \in \omega$, каждое $D_{m,k}$ содержит булеву комбинацию $Z_{m,k}$ некоторых множеств $D_{m,k'}$ так, что все $Z_{m,k} \cap p(\mathcal{M})$ попарно не пересекаются и ранг Морли для множества $Z_{m,k} \cap p(\mathcal{M})$ больше либо равен m, $k \in \omega$.

Очевидно, что если существуют копии $\psi_m(x, a_{k,\infty})$, свидетельствующие о том, что

$$\mathrm{MR}(p(x) \cup \{\psi_{m+1}(x, a_\infty)\}) \geq m+1,$$

то это неравенство действительно выполняется.

Лемма 4. *Для любого $m \in \omega$ существуют копии $\psi_m(x, a_{k,\infty})$ формулы $\psi_m(x, a_\infty)$, свидетельствующие о том, что*

$$\mathrm{MR}(p(x) \cup \{\psi_{m+1}(x, a_\infty)\}) \geq m+1.$$

Доказательство. Проводится индукцией по m. Лемма 3 устанавливает базис индукции. Теперь предположим, что $\mathrm{MR}(p(x) \cup \{\psi_m(x, a_\infty)\}) \geq m$ и об этом свидетельствуют некоторые множества $D_{m-1,k}$ и $Z_{m-1,k}$.

Заметим, что любые два элемента из $\psi_1(\mathcal{M}, a_\infty)\cap p(\mathcal{M})$ связаны a_∞-автоморфизмом. Действительно, если $b, c \in \psi_1(\mathcal{M}, a_\infty)\cap p(\mathcal{M})$, то в силу $b, c \in p(\mathcal{M})$ существует автоморфизм f с условием $f(b) = c$. Поскольку $\varphi(c, y)$ является атомом над c и $\models \varphi(c, a_\infty) \wedge \varphi(c, f(a_\infty))$, существует c-автоморфизм g такой, что $g(f(a_\infty)) = a_\infty$. Следовательно, $f \circ g$ является a_∞-автоморфизмом, переводящим b в c.

В силу того, что любые два элемента из $\psi_1(\mathcal{M}, a_\infty) \cap p(\mathcal{M})$ связаны a_∞-автоморфизмом, существует $n_0 \in \omega$ такой, что для любых элементов $a_n \in \psi_1(\mathcal{M}, a_\infty)$ цвета $n \geq n_0$ формула $\psi_{m+1}(x, a_\infty) \wedge \psi_m(x, a_n)$ совместна.

Действительно, в противном случае по теореме компактности существует реализация d типа p, для которой $d \in \psi_1(\mathcal{M}, a_\infty)$ и формула $\psi_{m+1}(x, a_\infty) \wedge \psi_m(x, d)$ несовместна. Вместе с тем, по определению формулы ψ_{m+1} существует реализация d' типа p, для которой $d' \in \psi_1(\mathcal{M}, a_\infty)$ и формула $\psi_{m+1}(x, a_\infty)\wedge\psi_m(x, d')$ совместна. Таким образом мы приходим к противоречию, поскольку d и d' не могут быть связаны a_∞-автоморфизмом.

По следствию 1 существует функция $f\colon \omega \to \omega$ такая, что каждое множество $\psi_m(\mathcal{M}, a_n)$ содержит лишь элементы, имеющие цвета $\leq f(n)$. Тогда множество $\psi_{m+1}(\mathcal{M}, a_\infty)$ разбивается на бесконечно много частей множествами $\psi_m(\mathcal{M}, a_n) \wedge \bigwedge\limits_{i\leq m} \neg\varphi^i(\mathcal{M}, a_\infty)$ и, следовательно, $\psi_{m+1}(\mathcal{M}, a_\infty) \cap p(\mathcal{M})$ разбивается на бесконечно много частей множествами

$$\left(\psi_m(\mathcal{M}, a_{n,\infty}) \wedge \bigwedge_{i\leq m} \neg\varphi^i(\mathcal{M}, a_\infty)\right) \cap p(\mathcal{M}),$$

где $a_{n,\infty} \in \psi_1(\mathcal{M}, a_\infty) \cap p(\mathcal{M})$, $n \in \omega$. Более того, так как

$$\mathrm{MR}\,(\psi_m(x, a_\infty) \restriction p(\mathcal{M})) \geq m,$$

мы можем аппроксимировать это свойство, используя $\psi_m(x, a_n)$ следующим образом. Существует функция $g\colon \omega \to \omega$ такая, что для любого $n \in \omega$ каждое множество $\psi_m(\mathcal{M}, a_{n'})$, $n' \geq g(n)$, (состоящее из элементов, имеющих цвета $\leq f(n')$) разбивается непустыми определимыми множествами Z_δ, являющимися булевыми комбинациями некоторых копий $\psi_k(x, a_n)$, $k < m$, $\delta \in n^{\leq m}$, $Z_{\delta i} \subseteq Z_\delta$, $Z_{\delta i} \cap Z_{\delta j} = \emptyset$ при $i \neq j$. Эти булевы комбинации могут быть выбраны единообразно, зависеть лишь от δ и параметров a_n и не зависеть от конструкции формул относительно n'.

Теперь при $n' \to \infty$, рассматривая копии множеств Z_δ с элементами из непересекающихся неограниченных в совокупности множеств конечных цветов и с условием $Z_{\delta i} \subset Z_\delta$ для неограниченного количества значений i, в силу теоремы компактности находим бесконечное число копий для $\psi_m(\mathcal{M}, a_{n,\infty}) \cap p(\mathcal{M})$ с параметрами из $\psi_1(\mathcal{M}, a_\infty) \cap p(\mathcal{M})$. Это свидетельствует о том, что $\mathrm{MR}\,(\psi_{m+1}(x, a_\infty) \restriction p(\mathcal{M})) \geq m+1$. $\square$

Теорема 3 вытекает непосредственно из леммы 4. $\square$

Замечание 2. Доказательство теоремы 3 показывает, что бесконечный ранг Морли имеет ограничение теории T на сигнатуру формулы $\varphi(x, y)$.

Список литературы

1. *Судоплатов С. В.* Проблема Лахлана / С. В. Судоплатов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – 336 с.
2. *Судоплатов С. В.* Гиперграфы простых моделей и распределения счетных моделей малых теорий / С. В. Судоплатов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 7. – С. 179–203.
3. *Baizhanov B. S.* Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation / B. S. Baizhanov, S. V. Sudoplatov, V. V. Verbovskiy // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2012. – Vol. 9. – P. 161–184.
4. *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. I / С. В. Судоплатов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 1. – С. 110–124.
5. *Baldwin J. T.* On strongly minimal sets / J. T. Baldwin, A. H. Lachlan // J. Symbolic Logic. — 1971. — Vol. 36, N 1. — P. 79–96.
6. *Pillay A.* A note on one-based theories / A. Pillay. — Notre Dame : University of Notre Dame, 1989. — 5 p. — (Preprint).
7. *Судоплатов С. В.* О мощных типах в малых теориях / С. В. Судоплатов // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31, № 4. —С. 118–128.
8. *Судоплатов С. В.* О предельных моделях над типом в классе ω-стабильных теорий / С. В. Судоплатов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 114–120.
9. *Pillay A.* Countable models of stable theories / A. Pillay // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – Vol. 89, N 4. – P. 666–672.
10. *Casanovas E.* The number of countable models / E. Casanovas. – Barcelona : University of Barcelona, 2012. – 19 p. – (Preprint).
11. *Sudoplatov S. V.* On Rudin–Keisler preorders in small theories / S. V. Sudoplatov // Algebra and Model Theory 8. Collection of papers / eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov, S. V. Sudoplatov and E. I. Timoshenko. – Novosibirsk : NSTU, 2011. – P. 94–102.
12. *Kim B.* On the number of countable models of a countable supersimple theory / B. Kim // J. London Math. Soc. – 1999. – Vol. 60, N 2. – P. 641–645.
13. *Tanović P.* Theories with constants and three countable models / P. Tanović // Archive for Math. Logic. – 2007. – Vol. 46, N 5–6. – P. 517–527.
14. *Tanović P.* Asymmetric RK-minimal types / P. Tanović // Archive for Math. Logic. – 2010. – Vol. 49, N 3. – P. 367–377.

Судоплатов Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, пр. Академика

Коптюга, 4, тел.: (383)3634674; Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел. (383)3461166; Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2, тел. (383)3634020
(e-mail: sudoplat@math.nsc.ru)

S. V. Sudoplatov
On Existence of Limit Models over Sequences of Types

Abstract. We consider limit models, i.e., countable models representable as unions of elementary chains of prime models over finite sets, but not isomorphic to any prime model over a finite set. Any countable model of small theory (i.e., of theory with countably many types) is either prime over a tuple or limit. Moreover, any limit model is either limit over a type, i.e., can be represented as a union of elementary chain of pairwise isomorphic prime models over realizations of some fixed type, or limit over a sequence of pairwise distinct types, over which prime models are not isomorphic.

In the paper, we characterize the property of existence of limit model over a sequence of types in terms of relations of isolation and semi-isolation: it is shown that there is a limit model over a sequence of types if and only if there are infinitely many non-symmetric transitions between types with respect to relation of isolation, or, that is equivalent, with respect to relation of semi-isolation. These criteria generalize the related criteria for limit models over a type. We characterize, in terms of relations of isolation and semi-isolation, the condition of existence of a limit model over a subsequence of a given sequence of types. We prove that if a theory has a limit model over a type then the Morley rank of this theory is infinite. Moreover, some restriction of the theory to some finite language has infinite Morley rank. That estimation is precise: there is an ω-stable theory with a limit model over a type and having Morley rank ω.

Keywords: limit model, sequence of types, Morley rank.

References

1. *Baizhanov B.S., Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V.* Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2012, vol. 9, pp. 161-184.
2. *Baldwin J.T., Lachlan A.H.* On strongly minimal Sets. *J. Symbolic Logic*, 1971, vol. 36, no 1, pp. 79-96.
3. *Casanovas E.* The number of countable models. Barcelona, University of Barcelona, 2012, 19 p. (Preprint).
4. *Kim B.* On the number of countable models of a countable supersimple theory. *J. London Math. Soc.*, 1999, vol. 60, no 2, pp. 641-645.
5. *Pillay A.* Countable models of stable theories. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 89, no 4, pp. 666-672.
6. *Pillay A.* A note on one-based theories. Notre Dame, University of Notre Dame, 1989, 5 p. (Preprint).
7. *Sudoplatov S.V.* On powerful types in small Theories. *Siberian Math. J.*, 1990, vol. 31, no 4, pp. 629-638.
8. *Sudoplatov S.V.* Complete theories with finitely many countable models. I. *Algebra and Logic*, 2004, vol. 43, no 1, pp. 62-69.

9. *Sudoplatov S.V.* The Lachlan problem. Novosibirsk, NSTU, 2009, 336 p. [in Russian]
10. *Sudoplatov S.V.* Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories. *J. Math. Sciences*, 2010, vol. 169, no 5, pp. 680-695.
11. *Sudoplatov S.V.* On limit models over types in the class of ω-stable theories. *Reports of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, vol. 3, no 4, pp. 114-120. [in Russian]
12. *Sudoplatov S. V.* On Rudin–Keisler preorders in small theories. *Algebra and Model Theory 8. Collection of papers*, eds.: A.G. Pinus, K.N. Ponomaryov, S.V. Sudoplatov and E.I. Timoshenko, Novosibirsk : NSTU, 2011, pp. 94-102.
13. *Tanović P.* Theories with constants and three countable models. *Archive for Math. Logic*, 2007, vol. 46, no 5-6, p. 517-527.
14. *Tanović P.* Asymmetric RK-minimal types. *Archive for Math. Logic.*, 2010, vol. 49, no 3, pp. 367-377.

Sudoplatov Sergey Vladimirivich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Leading Research Scientist, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 4, Academician Koptyug Avenue, Novosibirsk, 630090, tel.: (383)3634674; Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Avenue, Novosibirsk, 630073, tel.: (383)3461166; Novosibirsk State University, 2, Pirogova st., Novosibirsk, 630090, tel.: (383)3634020
(e-mail: sudoplat@math.nsc.ru)