Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 1. С. 31—43

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.988.67

Теоремы о неявных операторах в условиях групповой симметрии *

Б. В. Логинов
Ульяновский государственный технический университет

И. В. Коноплева
Ульяновский государственный технический университет

Ю. Б. Русак
FAHCSIA, Канберра

Аннотация. Доказаны G-инвариантные теоремы о неявных операторах для стационарных и нестационарных задач теории бифуркаций без предположения компактности допускаемой непрерывной группы G на основе общей теоремы о наследовании симметрии нелинейной задачи уравнениями разветвления и уравнениями разветвления в корневых подпространствах.

Ключевые слова: метод Ляпунова – Шмидта; уравнение разветвления; уравнения разветвления в корневых подпространствах; групповая симметрия.

1. Введение

Современная симметрийная теория ветвления решений нелинейных уравнений, начиная с 60-х годов прошлого века, выделилась в отдельную дисциплину в нелинейном функциональном анализе. Симметрийные методы в теории ветвления впервые были применены В. И. Юдовичем (1967), затем Б. В. Логиновым и В. А. Треногиным (1971), D. Ruelle (1973). В 80–90-е годы опубликованы монографии, содержащие приложения метода Ляпунова – Шмидта (D. Sattinger, 1979; A. Vanderbauwede, 1982; Б. В. Логинов, 1985; M. Golubitsky, D. Schaeffer, I. Stewart, 1984-1986) и методы центрального многообразия(A. Mielke, 1971; J. Iooss,

* Полученные результаты поддержаны проектом No. 2.1.1/6194 программы Развитие научного потенциала ВШ Минобразования РФ, РПЦ Научные и научно-педагогические кадры инновационной России ГК П1112 и составляют часть проекта 11-01-00074 РФФИ.

M. Adelmeyer, 1982, J. Iooss, P. Chossat, 1994) в условиях групповой симметрии. A. Vanderbauwede (1980) и N. Dancer (1980) доказали G-инвариантную бесконечномерную теорему о неявных операторах в общем случае неинвариантного ядра в предположении компактности допускаемой группы. Отметим общие результаты о конечномерных редукциях при вариационной формулировке нелинейных задач: В. А. Треногин, Н. А. Сидоров (1992), общая теорема о потенциальности уравнения разветвления (УР) с применением теории Морса-Конли, Ю. И. Сапронов (1991,1996) – конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах.

Случай неинвариантного ядра линеаризованного оператора возникает в задаче о несимметричных локализованных волновых структурах в стратифицированной жидкости [6, 7], где было доказано, что в вариационном случае с инвариантным относительно некомпактных групп симметрий функционалом уравнение разветвления Ляпунова – Шмидта действием группы может быть редуцировано к системе меньшей размерности. Теоремы о наследовании уравнениями разветвления (уравнениями разветвления в корневых подпространствах) групповой симметрии общих нелинейных стационарных и нестационарных задач в случае неинвариантного ядра линеаризации были доказаны в [5, 4] (соответственно [1, 2, 8]) для невариационных нелинейных задач. Они позволили получить результаты о редукции вариационных УР [4, 1, 2, 3, 8], движущихся по траектории точки ветвления.

Целью данной работы является доказательство G-инвариантной теоремы о неявных операторах в стационарных и нестационарных задачах без предположения компактности допускаемой непрерывной группы G на основе общей теоремы о наследовании симметрии уравнениями разветвления и уравнениями разветвления в корневых подпространствах.

В работе [1] для стационарной $F(x,\varepsilon) = 0, F(x_0,\varepsilon) \equiv 0$ и динамической бифуркации $F(p,x,\varepsilon) = 0,\ p = \frac{dx}{dt},\ F(0,x_0,\varepsilon) \equiv 0$ в банаховых пространствах E_1 и E_2 доказаны теоремы о наследовании групповой симметрии нелинейных операторов F сответствующими уравнениями разветвления в корневых подпространствах (УРК) А. М. Ляпунова и Э. Шмидта, движущимися по орбите точки ветвления x_0.

При наличии непрерывной групповой симметрии нелинейных уравнений с операторами, действующими в банаховых пространствах, группа Ли $G_l = G_l(a),\ a = (a_1,\dots,a_l)$ – ее существенные параметры, предполагается l-мерным дифференцируемым многообразием, удовлетворяющим условиям [6, 7]:

$\mathbf{c_1}$) представление $a \mapsto L_{g(a)}x_0$, действующее из окрестности единичного элемента $G_l(a)$ в пространство E_1 принадлежит классу C^1, так что $Xx_0 \in E_1$ для всех инфинитезимальных операторов $Xx = \lim\limits_{t\to 0} t^{-1}\left[L_{g(a(t))}x - x\right]$ в касательном к $L_{g(a)}$ многообразии $T^l_{g(a)}$;

$\mathbf{c_2}$) стационарная подгруппа элемента $x_0 \in E_1$ определяет представление $L(G_s)$ локальной группы Ли $G_s \subset G_l$, $s < l$, с s-мерной подалгеброй $T^s_{g(a)}$ инфинитезимальных операторов. Это означает, что для стационарной (нестационарной) бифуркации элементы $X_k x_0, X_k \in T^l_{g(a)}$ образуют в подпространстве нулей линеаризованного оператора $\kappa = (l-s)-$, $(2\kappa = 2(l-s))$-мерное подпространство и базисы в нем и в алгебре $T^l_{g(a)}$ можно упорядочить так, что $X_k x_0 = \xi_k \varphi_k (\xi_k \varphi_k + \bar{\xi}_k \overline{\varphi}_k), 1 \leq k \leq \kappa, X_j x_0 = 0$ для $j \geq \kappa + 1$.

2. Стационарные бифуркационные задачи

В вещественных банаховых пространствах E_1 и E_2 рассматривается общая задача стационарного ветвления

$$F(x, \varepsilon) = 0, \quad F(x_0, \varepsilon) \equiv 0, \tag{2.1}$$

в предположении, что нелинейное уравнение (2.1) имеет линеаризацию в окрестности точки бифуркации $(x_0; 0)$

$$\begin{aligned} &B_{x_0}(x - x_0) = B_{x_0}(\varepsilon)(x - x_0) - R(x_0, x - x_0, \varepsilon), \\ &R(x_0, 0, \varepsilon) = 0, \ \|R(x_0, x - x_0, \varepsilon)\| = o(\|x - x_0\|) \end{aligned} \tag{2.2}$$

где B_{x_0} – фредгольмов оператор с плотной в E_1 областью определения $D_{B_{x_0}} \subset D_{B_{x_0}(\varepsilon)}, N(B_{x_0}) = \mathrm{span}\{\varphi_i\}_1^n$, $\varphi_i = \varphi_i(x_0)$ – подпространство нулей (ядро) оператора B_{x_0}, $N^*(B_{x_0}) = \mathrm{span}\{\psi_i\}_1^n, \psi_i = \psi_i(x_0)$ – подпространство дефектных функционалов, $\{\gamma_i\}_1^n, \gamma_i = \gamma_i(x_0) \in E_1^*, \{z_i\}_1^n, z_i = z_i(x_0)$ – соответствующие биортогональные системы $\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle z_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$; $B_{x_0}(\varepsilon)$ достаточно гладкий по ε линейный оператор; нелинейный оператор R непрерывно дифференцируем по своим переменным и непрерывен по ε.

Определение 1. *Элементы $\varphi_k^{(s)}, s = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, n}$ образуют полный канонический обобщенный жорданов набор (ОЖН $\equiv B(\varepsilon)-$ЖН) оператор-функции $B - B(\varepsilon) : E_1 \to E_2$, если*

$$\begin{aligned} &B\varphi_k^{(s)} = \sum_{j=1}^{s-1} B_j \varphi_k^{(s-j)}, \ B(\varepsilon) = B_1\varepsilon + B_2\varepsilon^2 + \ldots, \langle \varphi_k^{(s)}, \gamma_l \rangle = 0, s = \overline{2, p_k}, \\ &D_p = \det \sum_{j=1}^{p_k} \langle B_j \varphi_k^{(p_k+1-j)}, \psi_l^{(1)} \rangle \neq 0, \ \varphi_k = \varphi_k^{(1)}, \psi_l = \psi_l^{(1)}, \ k, l = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Этот набор биканонический, если ОЖН сопряженной оператор-функции $B^* - B^*(\varepsilon)$, отвечающий элементам $\{\psi_l\}_1^n$ также канонический, *и три-канонический, если кроме того*

$$\langle\varphi_i^{(j)},\gamma_k^{(l)}\rangle=\delta_{ik}\delta_{jl},\ \gamma_k^{(l)}=\sum_{s=1}^{p_k+1-l}B_s^*\psi_k^{(p_k+2-l-s)},\ \langle z_i^{(j)},\psi_k^{(l)}\rangle=\delta_{ik}\delta_{jl},$$
$$z_i^{(j)}=\sum_{s=1}^{p_k+1-j}B_s\varphi_i^{(p_i+2-j-s)},\ \varphi_i^{(s)}=\varphi_i^{(s)}(x_0),$$
$$\Phi=\Phi(x_0)=(\varphi_1^{(1)},\dots,\varphi_1^{(p_1)},\dots,\varphi_n^{(1)},\dots,\varphi_n^{(p_n)}),\tag{2.4}$$

векторы $\gamma=\gamma(x_0),\Psi=\Psi(x_0)$ *и* $Z=Z(x_0)$ *определяются аналогично. Для линейной оператор-функции* $B-\varepsilon B_1$ *ОЖН всегда может быть выбран три-каноническим.*

Лемма 1. *Если для фредгольмовой оператор-функции* $B_{x_0}-B_{x_0}(\varepsilon)$ *существует полный три-канонический ОЖН, то определены проекторы*

$$\begin{array}{l}\mathbf{P}_{x_0}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\gamma_i^{(j)}(x_0)\rangle\varphi_i^{(j)}(x_0)=\langle\cdot,\gamma\rangle\Phi:E_1\to E_1^K\\ E_1^K=K(B_{x_0},B_{x_0}(\varepsilon))=span\{\varphi_i^{(j)}(x_0)\},\\ \mathbf{Q}_{x_0}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}(x_0)\rangle z_i^{(j)}(x_0)=\langle\cdot,\Psi\rangle Z:E_2\to E_{2,K}\\ E_{2,K}=span\{z_i^{(j)}(x_0)\},\end{array}\tag{2.5}$$

порождающие разложения E_1 *и* E_2 *в прямые суммы, отвечающие точке* x_0

$$E_1=E_1^K\dot{+}E_1^{\infty-K},\quad E_2=E_{2,K}\dot{+}E_{2,\infty-K}.\tag{2.6}$$

Оператор $B_0=B_{x_0}$ *сплетается проекторами* $\mathbf{P}_{x_0}$ *и* $\mathbf{Q}_{x_0}$

$$\begin{array}{l}B_{x_0}\mathbf{P}x=\mathbf{Q}B_{x_0}x\ \ \text{на}\ D_{B_{x_0}},\ B_{x_0}\Phi=\mathfrak{A}_0Z,\\ B_{x_0}^*\Psi=\mathfrak{A}_0\gamma,\ \mathfrak{A}_0=diag(A_1,\dots,A_n),\\ A_i=\left(\begin{array}{cccc}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&1&\dots&0\end{array}\right)-(p_i\times p_i)-\text{матрица}\end{array}\tag{2.7}$$

и $B_0:D_{B_0}\bigcap E_1^{\infty-K}(x_0)\to E_{2,\infty-K}(x_0)$ *является изоморфизмом.*

Следствие 1. *Для линейной по* ε *оператор-функции* $B_0-B(\varepsilon)$ $(B(\varepsilon)=\varepsilon B_1)$ *три-канонический ОЖН существует и свойства (2.4) могут быть дополнены следующими*

$$B_1\mathbf{P}=\mathbf{Q}B_1\quad\text{на}\quad D_{B_1},\ \ B_1\Phi=\mathfrak{A}_1Z,\ \ B_1^*\Psi=\mathfrak{A}_1\gamma\tag{2.8}$$

где $\mathfrak{A}_1=diag(A^1,\dots,A^n)$ *– клеточно-диагональная матрица,* $A^i-(p_i\times p_i)$ *— матрицы с единицами вдоль побочной диагонали и нулями в* *остальных местах. Таким образом, операторы* B_0 *и* B_1 *действуют в инвариантных парах подпространств* $E_1^K, E_{2,K}$ *и* $E_1^{\infty-K}, E_{2,\infty-K}$*, отвечающих точке* x_0*, и* $B_0 : D_{B_0} \bigcap E_1^{\infty-K} \to E_{2,\infty-K}, B_1 : E_1^K \to E_{2,K}$ *являются изоморфизмами.*

Теорема 1. *Пусть точке ветвления* x_0 *отвечает полный три-канонический ОЖН оператор-функции* $B_{x_0} - B_{x_0}(\varepsilon)$*. Задача определения малых решений уравнения (2.2) в окрестности точки* x_0 *эквивалентна разысканию малых решений конечномерных УРК А. М. Ляпунова (2.9) и Э. Шмидта (2.10).*

Доказательство. В соответствии с разложениями (2.6) полагая $x = u + v,\ v = v(x_0, \xi) = \sum \xi_{ik}\varphi_i^{(k)}(x_0) = \xi \cdot \Phi \in E_1^K(x_0),\ u = u(x_0) \in E_1^{\infty-K}(x_0)$, запишем уравнение (2.2) в проекциях

$$\begin{gathered}(I-\mathbf{Q}_{x_0})B_{x_0}u=(I-\mathbf{Q}_{x_0})B_{x_0}(\varepsilon)(u+v)+(I-\mathbf{Q}_{x_0})R(x_0,v(x_0,\xi)+u(x_0),\varepsilon),\\ \mathbf{Q}_{x_0}B_{x_0}v = \mathbf{Q}_{x_0}B_{x_0}(\varepsilon)(u+v) + \mathbf{Q}_{x_0}R(x_0,v(x_0,\xi)+u(x_0),\varepsilon).\end{gathered}$$

По теореме о неявных операторах и лемме 1 из первого уравнения однозначно определяется $u = u(x_0) = u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)$. Его подстановка во второе уравнение дает УРК А. М. Ляпунова

$$\begin{gathered}f(x_0, v(x_0,\xi,\varepsilon)) \equiv \mathfrak{A}_0\xi - \langle B_{x_0}(\varepsilon)(v(x_0,\xi) + u(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon)) +\\ +R(x_0, v(x_0,\xi) + u(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon)), \Psi(x_0)\rangle = 0\end{gathered} \tag{2.9}$$

Введение регуляризатора Э.Шмидта $\Gamma_{x_0} = \Gamma_0 = \widehat{B}_{x_0}^{-1},\ \widehat{B}_{x_0} = B_{x_0} + \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_j^{(1)}(x_0)\rangle z_j^{(1)}(x_0)$ сводит (2.2) к системе $\widehat{B}_{x_0}\ (x - x_0) = B_{x_0}(\varepsilon)(x - x_0) + R(x_0, x - x_0, \varepsilon) + \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_{i1} z_i^{(1)}(x_0),\ \xi_{s\sigma} = \langle x - x_0, \gamma_s^{(\sigma)}\rangle,\ \sigma = \overline{1, p_s},\ \ s = \overline{1, n}$, решение которой ищем в виде $x - x_0 = w + \xi\cdot\Phi(x_0) = w + v(x_0, \xi)$. Тогда $\widehat{B}_{x_0}\ w + \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=2}^{p_j} \xi_{jk} B_{x_0}\varphi_j^{(k)}(x_0) = B_{x_0}(\varepsilon)w + \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p_j} \xi_{jk} B_{x_0}(\varepsilon)\varphi_j^{(k)}(x_0) + R(x_0, w + v(x_0,\xi), \varepsilon)$, и использование формул преобразования элементов ОЖЦ оператором Γ_0, дает УРК Э. Шмидта

$$\begin{aligned}&t_{s1}(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) \equiv -\sum_{j=1}^{n} \xi_{j1}\langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1} B_{x_0}(\varepsilon)\varphi_j^{(1)}(x_0), \psi_s^{(1)}(x_0)\rangle -\\ &\langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1} R(x_0, w(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) + v(x_0,\xi),\varepsilon), \psi_s^{(1)}(x_0)\rangle = 0,\\ &t_{s\sigma}(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) \equiv\\ &\equiv \xi_{s\sigma} - \sum_{j=1}^{n} \xi_{j1}\langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1} B_{x_0}(\varepsilon)\varphi_j^{(1)}(x_0), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0)\rangle -\\ &-\langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1} R(x_0, w(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) + v(x_0,\xi),\varepsilon), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0)\rangle = 0,\\ &\sigma = 2, \ldots, p_s.\end{aligned} \tag{2.10}$$

□

Следствие 2. *Пусть* $B_{x_0}(\varepsilon) = \varepsilon B_1$. *Тогда УРК Шмидта принимает вид*

$$
\begin{gathered}
t_{s1}(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) \equiv -\tfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1} - \\
-\langle (I-\varepsilon B_1\Gamma_0)^{-1} R(x_0, w(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) + v(x_0,\xi),\varepsilon), \psi_s^{(1)}(x_0)\rangle = 0, \\
t_{s\sigma}(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) \equiv \xi_{s\sigma} - \tfrac{\varepsilon^{\sigma-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1} - \\
-\langle (I-\varepsilon B_1\Gamma_0)^{-1} R(x_0, w(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) + v(x_0,\xi),\varepsilon), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0)\rangle = 0, \\
\sigma = \overline{2,p_s}.
\end{gathered}
$$

Замечание 1. УРК Шмидта (2.9) имеет тот же вид, что и УРК Ляпунова (2.10). Можно привести явный вид преобразований из (2.9) в (2.10) для линейного случая $B_{x_0}(\varepsilon) = \varepsilon B_1$.

Далее предполагается, что оператор F допускает группу G, т. е. существуют ее представления L_g в E_1 и K_g в E_2, сплетающие F

$$K_g F(x,\varepsilon) = F(L_g x,\varepsilon) \tag{2.11}$$

При этом точка ветвления $(x_0, 0)$ движется по траектории $L_g x_0$ элемента x_0 и для линеаризации (2.2) уравнения (2.1) справедливы соотношения [1–4]

$$
\begin{gathered}
K_g B_{x_0} = B_{L_g x_0} L_g \quad \text{и} \quad K_g B_{x_0}(\varepsilon) = B_{L_g x_0}(\varepsilon) L_g, \\
K_g R(x_0, x - x_0, \varepsilon) = F(L_g x,\varepsilon) - F(L_g x_0,\varepsilon) - \\
-(B_{L_g x_0} - B_{L_g x_0}(\varepsilon)) L_g (x - x_0) = R(L_g x_0, L_g(x-x_0),\varepsilon)
\end{gathered} \tag{2.12}
$$

$$\varphi_i(L_g x_0) = L_g \varphi_i(x_0), \gamma_j(L_g) = L_g^{*-1}\gamma_i(x_0),\ i,j = \overline{1,n},$$

показывающие, что фредгольмов оператор B_{x_0} обладает симметрией только относительно стационарной подгруппы точки x_0. Для области значений $\mathcal{R}$ оператора B_{x_0} выполнено соотношение

$$\mathcal{R}(B_{x_0}) = \mathcal{R}(K_g B_{x_0} L_g^{-1}) = K_g \mathcal{R}(B_{x_0}).$$

Аналогичные соотношения выполнены для оператора $B_{x_0}(\varepsilon)$. Тогда для ядра сопряженного оператора $B_{x_0}^*$ имеем

$$
\begin{aligned}
& N^*(B_{x_0}) = \operatorname{span}\{\psi_1(x_0), \dots, \psi_n(x_0)\} \Longrightarrow \\
& N^*(B_{L_g x_0}) = \operatorname{span}\{K_g^{*-1}\psi_1(x_0), \dots, K_g^{*-1}\psi_n(x_0)\}, \\
& z_j(L_g x_0) = K_g z_j(x_0), j = \overline{1,n}
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

и можно доказать, что элементы упорядоченых по возрастанию длин цепочек ОЖН преобразуются по формулам

$$
\begin{aligned}
& \varphi_k^{(s)}(L_g x_0) = L_g \varphi_k^{(s)}(x_0); \psi_k^{(s)}(L_g x_0) = K_g^{*-1}\psi_k^{(s)}(x_0), \\
& z_k^{(s)}(L_g x_0) = K_g z_k^{(s)}(x_0).
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

В то же время обобщенные жордановы наборы в точках орбиты удовлетворяют условиям биортогональности (2.4). Из (2.12)–(2.14) следует утверждение

Лемма 2. *В условиях существования три-канонического ОЖН оператор-функции $B_{x_0} - A_{x_0}(\varepsilon)$ проекторы, определенные формулами (2.6), удовлетворяют свойствам сплетения*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{L_g x_0} = L_g \mathbf{P}_{x_0} L_g^{-1} \text{ или } L_g \mathbf{P}_{x_0} = \mathbf{P}_{L_g x_0} L_g, \\ \mathbf{Q}_{L_g x_0} = K_g \mathbf{Q}_{x_0} K_g^{-1} \text{ или } K_g \mathbf{Q}_{x_0} = \mathbf{Q}_{K_g x_0} K_g \end{aligned} \qquad (2.15)$$

и порождают разложения (2.6) банаховых пространств E_1 и E_2 в прямые суммы. При этом базисы в подпространствах нулей $N(B_{x_0})$ и дефектных функционалов $N^*(B_{x_0})$ и, соответственно, в корневых подпространствах $E_1^K(x_0)$ и $E_{2,K}(x_0)$ могут быть выбраны так, чтобы удовлетворялись следующие соотношения

$$\begin{aligned} &E_1 = E_1^K(L_g x_0) \dot{+} E_1^{\infty-K}(L_g x_0),\ E_1^K(L_g x_0) = L_g E_1^K(x_0), \\ &E_1^{\infty-K}(L_g x_0) = L_g E_1^{\infty-K}(x_0),\ E_2 = E_{2,K}(L_g x_0) \dot{+} E_{2,\infty-K}(L_g x_0), \\ &E_{2,K}(L_g x_0) = K_g E_{2,K}(x_0),\ E_{2,\infty-K}(L_g x_0) = K_g E_{2,\infty-K}(x_0). \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Теорема 2. *В условиях существования три-канонического ОЖН оператор-функции $B_{x_0} - B_{x_0}(\varepsilon)$ УРК А. М. Ляпунова (2.9) и Э. Шмидта (2.10) наследуют групповую симметрию уравнения (2.2)*

$$f(L_g x_0, L_g v(x_0,\xi),\varepsilon) = f(L_g x_0, v(L_g x_0,\xi),\varepsilon) = K_g f(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) \qquad (2.17)$$

$$t(L_g x_0, L_g v(x_0,\xi),\varepsilon) = t(L_g x_0, v(L_g x_0,\xi),\varepsilon) = L_g t(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) \qquad (2.18)$$

Доказательство проводится методами [1, 4].

Замечание 2. 1^0. Если x_0 изолированная точка бифуркации уравнения (2.1), то в случае существования три-канонического ОЖН оператор-функции $B_{x_0} - B_{x_0}(\varepsilon)$ и групповой симметрии (2.11), получается обобщение теоремы о наследовании групповой симметрии УРК при нелинейной зависимости от ε оператора $B_{x_0}(\varepsilon)$. 2^0. В достаточно общем случае, когда для оператор-функции $B_{x_0} - B_{x_0}(\varepsilon)$ и сопряженной к ней существуют канонические ОЖН (биканонические наборы) к формулам (2.3) добавляются $B_{x_0}^* \psi_k^{(s)}(x_0) = \sum\limits_{j=1}^{s-1} B_j^* \psi_k^{(s-j)}, D_p^* \neq 0$.

3. Динамические бифуркационные задачи

В вещественных банаховых пространствах E_1 и E_2 рассматривается бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной

$$\begin{array}{l} F(p,x,\varepsilon)=0,\ p=\frac{dx}{dt},\ F(0,x_0,\varepsilon)\equiv 0,\ F'_p(0,x_0,0)=A_{x_0}=A_0, \\ F'_x(0,x_0,0)=-B_{x_0}=-B_0,\ F'_p(0,x_0,\varepsilon)=A_0+A_{x_0}(\varepsilon)=A(\varepsilon), \\ F'_x(0,x_0,\varepsilon)=-B_0+B_{x_0}(\varepsilon),\ \overline{D}_{B_0}=E_1,\ D_{B_0}\subset D(A(\varepsilon)) \end{array} \quad (3.1)$$

Предположим, что A_0-спектр $\sigma_{A_0}(B_0)$ фредгольмова оператора B_0 распадается на две части: $\sigma^-_{A_0}(B_0)$ лежит строго в левой полуплоскости и $\sigma^0_{A_0}(B_0)$ состоит из собственных значений $\pm i\alpha$ кратности n с собственными элементами $u_j=u_{1j}\pm iu_{2j},\ v_j=v_{1j}\pm iv_{2j}$ – собственными элементами сопряженного оператора с обобщенными жордановыми цепочками длин p_j. Это означает существование элементов $u_j^{(k)},\overline{u}_j^{(k)}$ и $v_j^{(k)},\overline{v}_j^{(k)}$, таких, что $u_j^{(1)}=u_j, v_j^{(1)}=v_j, (B_0-i\alpha A_0)u_j^{(k)}=A_0u_j^{(k-1)}, (B_0+i\alpha A_0)\overline{u}_j^{(k)}=-A_0\overline{u}_j^{(k-1)}; (B_0^*+i\alpha A_0^*)v_j^{(k)}=-A_0^*v_j^{(k-1)}, (B_0^*-i\alpha A_0^*)\overline{v}_j^{(k)}=A_0^*\overline{v}_j^{(k-1)}$. Общий случай, когда спектр $\sigma^0_A(B_0)$ состоит из конечного количества ненулевых точек $\pm i\alpha_r, \alpha_r=k_r\alpha$ кратности $n_r, r=1,\dots\nu$, причем n_r и k_r — целые числа, не имеющие нетривиальных общих делителей, вызывает технические трудности. A_0-жорданов набор всегда можно выбрать три-каноническим. По лемме о биортогональности ОЖН можно принять $\langle A_0u_s^{(k)}, v_\sigma^{(p_\sigma+1-l)}\rangle=\delta_{s\sigma}\delta_{kl}$.

В предположении достаточной гладкости F уравнение (3.1) принимает вид

$$A_0\frac{dx}{dt}=B_0(x-x_0)-A_{x_0}(\varepsilon)\frac{dx}{dt}-B_{x_0}(\varepsilon)(x-x_0)-R(x_0,\frac{dx}{dt},x-x_0,\varepsilon) \quad (3.2)$$

Введением подстановки А. Пуанкаре $t=\frac{\tau}{\alpha+\mu}$, $x(t)=y(\tau)$ задача построения $\frac{2\pi}{\alpha+\mu}$–периодических решений (μ-малая добавка к частоте колебаний) сводится к определению 2π–периодических решений уравнения

$$\begin{array}{l} \mathfrak{B}_{x_0}y=\mu\mathcal{C}y+(\alpha+\mu)A_{x_0}(\varepsilon)\frac{dy}{d\tau}+B_{x_0}(\varepsilon)y+R(x_0,(\alpha+\mu)\frac{dy}{d\tau},y,\varepsilon)= \\ =\mu\mathcal{C}y+\mathfrak{R}(x_0,\frac{dy}{d\tau},y,\mu,\varepsilon), \\ \mathfrak{B}_{x_0}y=(\mathfrak{B}_0y)(\tau)\equiv B_0y(\tau)-\alpha A_0\frac{dy}{d\tau},\ (\mathcal{C}y)(\tau)\equiv A_0\frac{dy}{d\tau} \end{array} \quad (3.3)$$

Фредгольмов оператор $(\mathfrak{B}_0y)(\tau)$ и операторы (3.3) отображают пространство Y 2π–периодических непрерывно дифференцируемых функций τ со значениями в $\mathcal{E}_1=E_1\dot{+}iE_1$ в пространство Z 2π–периодических непрерывных функций τ со значениями в $\mathcal{E}_2=E_2\dot{+}iE_2$ при использовании функционалов специального вида $\langle\langle y,f\rangle\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle y(\tau),f(\tau)\rangle d\tau,\ y\in$

$Y,\ f\in Y^*$ $(y\in Z,\ f\in Z^*)$. Подпространства нулей операторов $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_0^*$ $2n$–мерны, $N(\mathfrak{B}_0)=\mathrm{span}\{\varphi_j^{(1)}=\varphi_j(x_0,\tau)=u_j(x_0)e^{i\tau};\ \overline{\varphi}_j^{(1)}\}$; $N(\mathfrak{B}_0^*)=\mathrm{span}\{\psi_j^{(1)}=\psi_j(x_0,\tau)=v_j(x_0)e^{i\tau};\ \overline{\psi}_j^{(1)}\}$ с A_0– и A_0^*–ЖЦ $\varphi_j^{(k)}=u_j^{(k)}(x_0)e^{i\tau}$, $\psi_j^{(k)}=v_j^{(k)}(x_0)e^{i\tau}$, соответствующими формулам (2.3) и (2.4) удовлетворяющими условиям биортогональности

$$\langle\langle\varphi_j^{(k)},\gamma_s^{(l)}\rangle\rangle=\delta_{js}\delta_{kl},\langle\langle z_j^{(k)},\psi_s^{(l)}\rangle\rangle=\delta_{js}\delta_{kl},$$
$$k(l)=\overline{1,p_j(p_s)},\gamma_s^{(l)}=A_0^*\psi_s^{(p_s+1-l)},z_j^{(k)}=A_0\varphi_j^{(p_j+1-k)},j(s)=\overline{1,n}.$$

Лемма 3. *Определим проекторы* $\mathbf{P}_{x_0}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p_j}\langle\langle\cdot,\gamma_j^{(1)}\rangle\rangle\varphi_j^{(1)}=\langle\langle\cdot,\gamma\rangle\rangle\Phi$, $\overline{\mathbf{P}}_{x_0}$; $\mathbf{Q}_{x_0}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p_j}\langle\langle\cdot,\psi_j^{(1)}\rangle\rangle z_j^{(1)}=\langle\langle\cdot,\Psi\rangle\rangle Z$, $\overline{\mathbf{Q}}_{x_0}$; $\mathbb{P}_{x_0}=\mathbf{P}_{x_0}+\overline{\mathbf{P}}_{x_0}, \mathbb{Q}_{x_0}=\mathbf{Q}_{x_0}+\overline{\mathbf{Q}}_{x_0}$, *порождающие разложения банаховых пространств* Y *и* Z *в прямые суммы* $Y=Y^{2n}(x_0)\dot{+}Y^{\infty-2n}(x_0)$, $Z=Z_{2n}(x_0)\dot{+}Z_{\infty-2n}(x_0)$. *Операторы* $\mathfrak{B}_0$ *и* A_0 *сплетаются проекторами* $\mathbf{P}_{x_0}$ *и* $\mathbf{Q}_{x_0}$, $\overline{\mathbf{P}}_{x_0}$ *и* $\overline{\mathbf{Q}}_{x_0}$, $\mathfrak{B}_0\mathbf{P}_{x_0}u=\mathbf{Q}_{x_0}\mathfrak{B}_0u$ *на* D_{B_0}, $\mathfrak{B}_0\Phi=\mathfrak{A}_0Z$, $\mathfrak{B}_0^*\Psi=\mathfrak{A}_0\gamma$, $\mathfrak{A}_0=diag\{B_1,\ldots,B_n\}, B_i$–$(p_i\times p_i)$-*матрица (2.7)*, $\mathcal{C}\mathbf{P}_{x_0}u=\mathbf{Q}_{x_0}\mathcal{C}u$ *на* D_{A_0}, $A_0\Phi=\mathfrak{A}_1Z$, $A_0^*\Psi=\mathfrak{A}_1\gamma$, $\mathfrak{A}_1$–$(p_i\times p_i)$-*матрица (2.7). Операторы* A_0 *и* $\mathfrak{B}_0$ *действуют в инвариантных парах подпространств* $Y_1^K(x_0), Z_{2,K}(x_0)$ *и* $Y_1^{\infty-K}(x_0), Z_{2,\infty-K}(x_0), \mathfrak{B}_0: D_{\mathfrak{B}_0}\bigcap Y_1^{\infty-K}\to E_{2,\infty-K}, A_0: Y_1^K\to Z_{2,K}$ *являются изоморфизмами.*

Теорема 3. *В сделанных предположениях задача о* 2π*–периодических решениях уравнения (3.3) в окрестности точки бифуркации* x_0 *эквивалентна отысканию малых решений конечномерных УРК А. М. Ляпунова (3.4) и Э. Шмидта (3.5).*

Доказательство. Действуя соответственно п.2, запишем уравнение (3.3) в проекциях на корневые подпространства и их прямые дополнения, отвечающие точке x_0 (теорема 1). При таком подходе получаем УРК А. М. Ляпунова в базисе $\{\varphi,\overline{\varphi}\}$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{f}(x_0,v(x_0,\xi,\overline{\xi}),\mu,\varepsilon)=\mathbf{Q}_{x_0}\{\mu\mathcal{C}[...]+\mathfrak{R}(x_0,\tfrac{d}{d\tau}[...],[...],\mu,\varepsilon)=\\&=[\mathfrak{A}_0-i\mu\mathfrak{A}_1]\,\xi-\langle\langle\mathfrak{R}(x_0,\tfrac{d}{d\tau}[...],[...],\mu,\varepsilon),\Psi(x_0)\rangle\rangle=0,\\&\overline{\mathfrak{f}}(x_0,v(x_0,\xi,\overline{\xi}),\mu,\varepsilon)=0,\ [...]=u(v(x_0,\xi,\overline{\xi}),\mu,\varepsilon)+v(x_0,\xi,\overline{\xi}).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Подробнее остановимся на выводе УРК Э. Шмидта. Записывая как и в п. 2 уравнение (3.3) в виде эквивалентной системы

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathfrak{B}}_0=\mu\mathcal{C}y+\mathfrak{R}(x_0,\tfrac{dy}{d\tau},y,\mu,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}(\xi_{i1}\varphi_i^{(1)}+\overline{\xi}_{i1}z_i^{(1)}),\\&\xi_{j\sigma}=\langle\langle y,\gamma_s^{(\sigma)}\rangle\rangle,\overline{\xi}_{s\sigma}=\langle\langle y,\overline{\gamma}_s^{(\sigma)}\rangle\rangle,\end{aligned}$$

$\widehat{\mathfrak{B}}_0 = \mathfrak{B}_0 + \sum[\langle\langle\cdot, \gamma_i^{(1)}\rangle\rangle z_i^{(1)} + \langle\langle\cdot, \overline{\gamma}_i^{(1)}\rangle\rangle \overline{z}_i^{(1)}]$ – регуляризатор Шмидта, $\widehat{\mathfrak{B}}_{x_0}^{-1} = \Gamma_{x_0}$, ее решение ищем в виде $y = w + \xi \cdot \Phi + \overline{\xi} \cdot \overline{\Phi} = w + v(x_0, \xi, \overline{\xi})$. Аналогично п. 2 получаем $w = -(I - \mu\Gamma_{x_0}\mathcal{C})^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{s=2}^{p_i} (\xi_{ij}\varphi_i^{(j)} + \overline{\xi}_{ij}\overline{\varphi}_i^{(j)}) + \mu(I - \mu\Gamma_{x_0}\mathcal{C})^{-1}\Gamma_{x_0}\mathcal{C}(\xi \cdot \Phi + \overline{\xi} \cdot \overline{\Phi}) + \Gamma_{x_0}(I - \mu\mathcal{C}\Gamma_{x_0})^{-1}\mathfrak{R}(x_0, (\alpha+\mu)\frac{d}{d\tau}[w(x_0) + v(x_0, \xi, \overline{\xi})], w(x_0) + v(x_0, \xi, \overline{\xi}), \mu, \varepsilon)$. Подставляя w во вторые уравнения системы и учитывая соотношения $\Gamma_{x_0}\gamma_j^{(1)}(x_0) = \psi_j^1(x_0), \Gamma_{x_0}^*\gamma_j^{(s)}(x_0) = \psi_j^{(p_j+2-s)}(x_0), s \geq 2$, получаем УРК Э. Шмидта

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{t}_{s1}(x_0, v(x_0, \mu, \varepsilon) = -\mu\langle\langle\mathcal{C}(I - \mu\Gamma_{x_0}\mathcal{C})^{-1}(\xi \cdot \Phi + \overline{\xi} \cdot \overline{\Phi}), \psi_s^{(1)}(x_0)\rangle\rangle - \\
&-\langle\langle(I - \mu\mathcal{C}\Gamma_{x_0})^{-1}\mathfrak{R}(...), \psi_s^{(1)}(x_0)\rangle\rangle = 0, \\
&\mathfrak{t}_{s\sigma}(x_0, v(x_0, \mu, \varepsilon) = \langle\langle(I - \mu\Gamma_{x_0}\mathcal{C})^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{p_i} (\xi_{ij}\varphi_i^{(j)} + \overline{\xi}_{ij}\overline{\varphi}_i^{(j)}) - \\
&-\mu(I - \mu\Gamma_{x_0}\mathcal{C})^{-1}\Gamma_{x_0}\mathcal{C}(\xi \cdot \Phi + \overline{\xi} \cdot \overline{\Phi}), \gamma_j^{(s)}\rangle\rangle - \\
&-\langle\langle(I - \mu\mathcal{C}\Gamma_{x_0})^{-1}\mathfrak{R}(...), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0)\rangle\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Учитывая соотношения

$$i^{\sigma-1}\varphi_j^{(\sigma)}(x_0) = (\Gamma_{x_0}\mathcal{C})^{\sigma-1}\varphi_j^{(1)}(x_0) = i\varphi_j^{\left(\sigma - \left[\frac{\sigma}{p_j}\right]p_j\right)}(x_0),$$

получаем УРК Э. Шмидта

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{t}_{s1}(x_0, v(x_0, \mu, \varepsilon) = -\tfrac{(i\mu)^{p_s}}{1-(i\mu)^{p_s}}\xi_{s1} - \langle\langle(I - \mu\Gamma_{x_0}\mathcal{C})^{-1}\mathfrak{R}(...), \psi_s^{(1)}(x_0)\rangle\rangle = 0, \\
&\mathfrak{t}_{s\sigma}(x_0, v(x_0, \mu, \varepsilon) = \\
&= \xi_{s\sigma} - \tfrac{(i\mu)^{\sigma-1}}{1-(i\mu)^{p_s}}\xi_{s1} - \langle\langle(I - \mu\Gamma_{x_0}\mathcal{C})^{-1}\mathfrak{R}(...), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0)\rangle\rangle = 0, \\
&s = \overline{1, n}, \sigma = \overline{1, p_s}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

□

Замечание 3. Можно дать явный вид преобразований от УРК (3.4) к (3.5).

Рассматривая УРК А. М. Ляпунова (3.4) и Э. Шмидта (3.5) для периодических решений в условиях групповой симметрии, отметим, что в силу три-каноничности ОЖН вся теория, изложенная в п. 2, переносится на рассматриваемую ситуацию. Поэтому здесь мы сформулируем окончательные результаты в базисе $\{\varphi_1, \overline{\varphi_1}, ..., \varphi_n, \overline{\varphi_n}\}$.

Теорема 4. *УРК А. М. Ляпунова (3.4) и Э. Шмидта (3.5) наследуют групповую симмтрию уравнения (3.1)*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{f}(L_0x_0, L_gv(x_0, \xi, \overline{\xi}), \mu, \varepsilon) = \mathbf{f}(L_0x_0, v(L_0x_0, \xi, \overline{\xi}), \mu, \varepsilon) = \\
&= K_g\mathbf{f}(x_0, v(x_0, \xi, \overline{\xi}), \mu, \varepsilon), \\
&\mathbf{t}(L_0x_0, L_gv(x_0, \xi, \overline{\xi}), \mu, \varepsilon) = \mathbf{t}(L_0x_0, v(L_0x_0, \xi, \overline{\xi}), \mu, \varepsilon) = \\
&= L_g\mathbf{t}(x_0, v(x_0, \xi, \overline{\xi}), \mu, \varepsilon)
\end{aligned}$$

4. Теоремы о неявных операторах

Теорема 5. *Пусть в задаче стационарного ветвления (2.1) точке ветвления отвечает полный три-канонический ОЖН оператор-функции $B_{x_0} = B_{x_0}(\varepsilon)$, причем в условии* $\mathbf{c_2}$) $\kappa = n$ *и* $G_s, s < l$ *является нормальным делителем* G_l *с соответствующей идеалом* $T^s_{g(a)}$ *инфинитезимальных операторов. Тогда при сделанных предположениях о гладкости действия непрерывной группы* G_r *существует непрерывная функция* $v(x_0, \xi, \varepsilon) = v(x_0, \xi) + u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) : T^n_{g(a)}x_0 \times (-\delta, \delta) \to E_1$, *инвариантная относительно фактор-группы* $G_\kappa = G_n = G_l/G_s$ *на* $T^n_g x_0$ *и такая, что*

$$F(x_0 + v(x_0, \xi, \varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad v(x_0, \xi) \in T^n_{g(a)}x_0, \quad |\varepsilon| < \delta \tag{4.1}$$

Доказательство. На основании свойств сплетения (2.15)–(2.16) проекторов $\mathbf{P}_{x_0}$ и $\mathbf{Q}_{x_0}$ существует линейный изоморфизм

$$B_0 = B_{x_0} : D_{B_0} \cap E_1^{\infty-k}(x_0) \to E_{2,\infty-k}, \tag{4.2}$$

сплетаемый проекторами $\mathbf{P}_{x_0}$ и $\mathbf{Q}_{x_0}$, т. е. $B_0\mathbf{P}_{x_0}x = \mathbf{Q}_{x_0}B_0x,\ x \in D_B$ и $B_{L_gx_0}\mathbf{P}_{L_gx_0}x = \mathbf{Q}_{L_gx_0}B_{L_gx_0}x,\ x \in L_gD_{B_0}$, в то время, как теорема о наследовании УРК групповой симметрии возвращает нас к G-инвариантности уравнения (4.1). □

Теорема 6. *В задаче динамического ветвления (3.1) в точке ветвления* A_0-*жорданов набор всегда можно выбрать три-каноническим. Пусть в условии* $\mathbf{c_2}$) $\kappa = n$ *и* $G_s, s < l$ *является нормальным делителем* G_l *с соответствующим идеалом* $T^s_{g(a)}$ *инфинитезимальных операторов. Тогда при сделанных предположениях относительно гладкости действия непрерывной группы* G_l *существует непрерывная функция* $v(x_0, \xi, \varepsilon) = v(x_0, \xi, \overline{\xi}) + u(x_0, v(x_0, \xi, \overline{\xi}), \mu, \varepsilon) : T^{2n}_{g(a)}x_0 \times (-\delta, \delta) \to \mathcal{E}_1$, *инвариантная относительно фактор-группы* $G_{2\kappa} = G_{2n} = G_l/G_s$ *на* $T^{2n}_{g(a)}x_0$ *и такая, что* $F(x_0 + v(x_0, \xi, \overline{\xi}, \varepsilon), \varepsilon)) = 0$ *при* $v(x_0, \xi, \overline{\xi}) \in T^{2n}_{g(a)}x_0,\ |\varepsilon| < \delta$.

Схема доказательства та же, что и в предыдущей теореме.

Следствие 3. *Теоремы 5 и 6 соответственно справедливы для полупростых точек ветвления, т. е. для точек, у которых отсутствуют обобщенные жордановы цепочки.*

Список литературы

1. Коноплева И. В. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических

бифуркационных задачах / И. В. Коноплева, Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак // Изв. высших учеб. заведений. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки. – 2009. – Спецвыпуск. – С. 115–124.
2. Коноплева И. В. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных бифуркационных задачах / И. В. Коноплева, Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак// Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений АМАДЕ : тр. 5-й междунар. конф. (Беларусь, Минск, 14-19 сентября 2009 г.). – 2009.– Т. 1. – С. 90–95.
3. Коноплева И. В. Бифуркация, симметрия и косимметрия в дифференциальных уравнениях, не разрешенных относительно производной, с вариационными уравнениями разветвления / И. В. Коноплева, Б. В. Логинов// ДАН. Математика. – 2009. – Т. 427, № 4. – С. 452–457; Doklady Mathematics. – 2009. – Vol. 80, N 1. – С. 541–546.
4. Логинов Б. В. Симметрия и потенциальность в общей задаче теории ветвления / Б. В. Логинов, И. В. Коноплева, Ю. Б. Русак // Изв. вузов. Математика. – 2006. – Т. 4(527). – С. 30–40.
5. Логинов Б. В. Общая задача теории ветвления в условиях групповой симметрии / Б. В. Логинов // Узбек. мат. журн. – 1991. – № 1. – С. 38–44.
6. Макаренко Н. И. О ветвлении решений инвариантных вариационных уравнений / Н. И. Макаренко // ДАН. Математика. – 1996. – Vol. 348, N 3. – С. 302–304.
7. Макаренко Н. И. Симметрия и косимметрия вариационных задач в теории волн / Н. И. Макаренко // Применение симметрии и косимметрии в теории бифуркаций и фазовых переходов : тр. междунар. школы-семинара (Сочи, 14–18 сентября 2001 г.). - Ростов н/Д. : Ростов. гос. ун-т, 2001. – С. 109–120.
8. Bifurcation and symmetry in differential equations non-resolved with respect to derivative / B. V. Loginov, O. V. Makeev, I. V. Konopleva, Yu. B. Rousak // ROMAI J. – 2007. – Vol. 3, N 1. – С. 151–173.

B. V. Loginov, I. V. Konopleva, Y. B. Rousak
Implicit operator theorems under group symmetry conditions

Abstract. On the base of the general theorem about the inheritance of nonlinear problem group symmetry by the relevant branching equation and branching equation in the root-subspace G-invariant implicit operator theorems are proved for stationary and nonstationary bifurcation problems without assumtion on compactness of allowing group.

Keywords: Lyapounov-Schmidt method, branching equation, branching equation in the root-subspaces, group symmetry

Логинов Борис Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32 тел.: (8422)431547 (`loginov@ulstu.ru`)

Коноплева Ирина Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32 тел.: (8422)431749 (`i.konopleva@ulstu.ru`)

Русак Юрий Борисович, кандидат физико-математических наук, сотрудник Министерства общественных взаимоотношений, Канберра, Австралия (irousak@gmail.com)

Loginov Boris, Ulyanovsk State Technical University, 32, Severny Venetz St., Ulyanovsk, 432027, Ulyanovsk, professor, Phone: (8422)431547 (loginov@ulstu.ru)

Konopleva Irina, Ulyanovsk State Technical University, 32, Severny Venetz St., Ulyanovsk, 432027, Ulyanovsk, Docent Phone: (8422)431749 (i.konopleva@ulstu.ru)

Rousak Yuri, FAHCSIA, Canberra, Australia, PHD, (irousak@gmail.com)