Серия «Математика»
2017. Т. 21. С. 3—18

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.716
MSC 68R01
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.3

О некоторых максимальных частичных ультраклонах на двухэлементном множестве

С. А. Бадмаев

Бурятский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются мультифункции на двухэлементном множестве. Под мультифункцией на конечном множестве понимается функция, определенная на данном множестве и принимающая в качестве значений его подмножества. Очевидно, что суперпозиция в обычном смысле для работы с мультифункциями не подходит, поэтому для мультифункций требуется несколько расширить стандартное понятие суперпозиции. Множества мультифункций, замкнутые относительно «расширенной» суперпозиции, в зависимости от вида этой суперпозиции, называют мультиклонами и частичными ультраклонами.

В теории дискретных функций классической является задача описания решетки клонов. В связи с трудностью решения этой задачи изучается не вся решетка целиком, а только ее отдельные фрагменты, например минимальные и максимальные элементы, различные интервалы. В частности, отметим, что известны описания всех максимальных клонов функций k-значной логики и частичных функций k-значной логики, всех максимальных гиперклонов и ультраклонов на двухэлементном множестве, а также всех максимальных мультиклонов на двухэлементном множестве. В заметке исследуется задача описания некоторых максимальных частичных ультраклонов на двухэлементном множестве.

Ключевые слова: мультифункция, суперпозиция, мультиклон, частичный ультраклон, максимальный ультраклон.

1. Основные понятия и определения

Пусть $A = \{0, 1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P_{2,n}^{\overline{*}} = \{f | f : A^n \to F\}, P_2^{\overline{*}} = \bigcup\limits_n P_{2,n}^{\overline{*}}$,

$P_{2,n} = \{f | f \in P_{2,n}^{\overline{*}}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}$.

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из $P_2^{\overline{*}}$ – мультифункциями на A.

Для того чтобы суперпозиция $f(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m))$, где $f,f_1,\dots,f_n \in P_2^{\overline{*}}$, определяла мультифункцию $g(x_1,\dots,x_m)$, следуя [4], определим значения мультифункции f на наборах из подмножеств множества A следующим образом: если $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in A^m$, то

$$g(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\begin{cases}\bigcap\limits_{\beta_i\in f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_m)} f(\beta_1,\dots,\beta_n), & \text{если пересечение не пусто;}\\ \bigcup\limits_{\beta_i\in f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_m)} ff(\beta_1,\dots,\beta_n), & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

На наборах, содержащих $\varnothing$, мультифункция принимает значение $\varnothing$. Это определение позволяет вычислить значение $f(x_1,\dots,x_n)$ на любом наборе $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in F^n$.

Отметим, что в настоящей работе мы будем придерживаться терминологии, принятой в [6], что позволит нам здесь не вводить дополнительных определений.

В дальнейшем, если это не вызывает недоразумений, мультифункцию будем называть просто функцией.

Рассмотрим следующие множества функций:

1) K_1 – множество, состоящее из всех функций f, для которых выполняется одно из двух условий:

   а) $f(\tilde{0})=*$ или $f(\tilde{1})=*$;

   б) $f(\tilde{0})=0$ и $f(\tilde{1})=1$.

2) K_2 — множество, состоящее из всех функций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из трех условий:

   а) $f(\tilde{\alpha})=f(\bar{\tilde{\alpha}})=-$;

   б) $f(\tilde{\alpha})=f(\bar{\tilde{\alpha}})=*$;

   в) $f(\tilde{\alpha}),f(\bar{\tilde{\alpha}})\in\{0,1\}$ и $f(\tilde{\alpha})=\overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$.

3) K_3 — множество, состоящее из всех функций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из двух условий:

   а) $f(\tilde{\alpha})=*$ или $f(\bar{\tilde{\alpha}})=*$;

   б) $f(\tilde{\alpha}),f(\bar{\tilde{\alpha}})\in\{0,1\}$ и $f(\tilde{\alpha})=\overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$.

4) K_4 — множество всех функций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

а) если $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — двоичные наборы такие, что

$$(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (001), (010), (111)\}$$

для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и f принимает на наборах $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ только значения 0 и 1, то

$$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\};$$

б) если существует двоичный набор, на котором значение функции f равно $-$, то на любом двоичном наборе значение функции f не равно 1;

в) если двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $f(\tilde{\alpha}) = *$, то $f(\tilde{\beta}) = *$.

5) K_5 — множество всех функций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

а) если $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — двоичные наборы такие, что

$$(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (011), (101), (111)\}$$

для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и f принимает на наборах $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ только значения 0 и 1, то

$$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\};$$

б) если существует двоичный, на котором значение функции f равно $-$, то на любом двоичном наборе значение функции f не равно 0;

в) если двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $f(\tilde{\beta}) = *$, то $f(\tilde{\alpha}) = *$.

Обозначим через $\tilde{\alpha}^{(\beta)}$ уточнение набора $\tilde{\alpha}$, в котором все значения $-$ заменили на $\beta \in \{0, 1\}$.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in K_4$ и набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0, 1, -\}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = 0$. Тогда $f(\tilde{\alpha}^{(0)}) \in \{0, -\}$.*

Доказательство. Докажем от противного. Очевидно, что $f(\tilde{\alpha}^{(0)}) \neq 1$, тогда $f(\tilde{\alpha}^{(0)}) = *$. Поскольку $f(\tilde{\alpha}) = 0$, то существует уточнение $\tilde{\delta}$ набора $\tilde{\alpha}$ такое, что $f(\tilde{\delta}) = 0$. Так как $\alpha_i^{(0)} \leq \delta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, то получили противоречие с тем, что функция f лежит в классе K_4. □

Лемма 2. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in K_4$ *и набор* $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *где* $\alpha_i \in \{0, 1, -\}$ *такой, что* $f(\tilde{\alpha}) = 1$. *Тогда* $f(\tilde{\alpha}^{(0)}) = 1$ *и не существует уточнения набора* $\tilde{\alpha}$, *на котором значение функции* f *равно* $-$.

Доказательство. Очевидно, что $f(\tilde{\alpha}^{(0)}) \neq 0$. Так как $f(\tilde{\alpha}) = 1$, то существует уточнение $\tilde{\delta}$ набора $\tilde{\alpha}$ такое, что $f(\tilde{\delta}) = 1$. Поскольку $f \in K_4$, то не существует уточнения, на котором значение функции f равно $-$. Случай $f(\tilde{\alpha}^{(0)}) = *$ также невозможен, поскольку $\alpha_i^{(0)} \leq \delta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Лемма 3. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in K_5$ *и набор* $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *где* $\alpha_i \in \{0, 1, -\}$ *такой, что* $f(\tilde{\alpha}) = 0$. *Тогда* $f(\tilde{\alpha}^{(1)}) = 0$ *и не существует уточнения набора* $\tilde{\alpha}$, *на котором значение функции* f *равно* $-$.

Доказательство. Очевидно, что $f(\tilde{\alpha}^{(1)}) \neq 1$. Так как $f(\tilde{\alpha}) = 0$, то существует уточнение $\tilde{\delta}$ набора $\tilde{\alpha}$ такое, что $f(\tilde{\delta}) = 0$. Поскольку $f \in K_5$, то не существует уточнения, на котором значение функции f равно $-$. Случай $f(\tilde{\alpha}^{(1)}) = *$ также невозможен, поскольку $\alpha_i^{(1)} \geq \delta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Лемма 4. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in K_5$ *и набор* $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *где* $\alpha_i \in \{0, 1, -\}$ *такой, что* $f(\tilde{\alpha}) = 1$. *Тогда* $f(\tilde{\alpha}^{(1)}) \in \{1, -\}$.

Доказательство. Докажем от противного. Очевидно, что $f(\tilde{\alpha}^{(1)}) \neq 0$, тогда $f(\tilde{\alpha}^{(1)}) = *$. Поскольку $f(\tilde{\alpha}) = 1$, то существует уточнение $\tilde{\delta}$ набора $\tilde{\alpha}$ такое, что $f(\tilde{\delta}) = 1$. Так как $\alpha_i^{(1)} \geq \delta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, то получили противоречие с тем, что функция f лежит в классе K_5. □

Лемма 5. *Следующие множества совпадают с* $P_2^{\overline{*}}$:
1) $[\{(1*), (1-)\}]$; *4)* $[\{(0-), (-1), (*0)\}]$;
2) $[\{(*0), (-0)\}]$; *5)* $[\{(0-), (--), (0*), (*0)\}]$;
3) $[\{(0-), (-1), (0*)\}]$; *6)* $[\{(-1), (--), (1*), (*1)\}]$.

Доказательство. Пункты *1) – 4)* доказаны в [1; 2].

5) Множество $\{(0-), (--), (0*), (*0)\}$ сведем к $\{(1-), (1*)\}$. Рассмотрим следующие суперпозиции:

$$\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0 & *\\ 0 & *\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\ *\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}*\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0\\ *\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ *\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&*\\0&*&0\\0&*&*\\0&0&0\\0&0&*\\0&*&0\\0&*&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ *\\ *\\ *\\0\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&*\\0&0&*\\0&0&*\\-&0&0\\-&0&*\\-&0&*\\-&0&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ *\\ *\\ *\\-\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\ *\\ *\\ *\\-\\ *\\ *\\ *\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\\0&-&0\\0&-&-\\-&0&0\\-&0&-\\-&-&0\\-&-&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\-\\-\\-\end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix}*\\ *\\ *\\ *\\0\\0\\0\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&-\\0&0&-\\0&0&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&*\\0&0&*\\1&0&*\\1&0&*\\0&0&*\\0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\\1&-&0\\1&-&0\\1&-&1\\1&-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\1\\1\\-\\-\end{pmatrix}=g(x,y,z).$$

Применив операцию суперпозиции к функциям $g(x,y,z)$ и 1, получим функцию $(1-)$: $g(1,y,1)=(1-)$.

б) Множество $\{(-1),(--),(1*),(*1)\}$ сведем к $\{(-0),(*0)\}$. Рассмотрим следующие суперпозиции:

$$\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\1&*\\1&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ *\\ *\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\ *\end{matrix}\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix},\ \begin{matrix}-\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&*&*\\1&*&1\\1&*&*\\1&*&1\\1&1&*\\1&1&1\\1&1&*\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\1\\ *\\1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}-&1&*\\-&1&*\\1&1&*\\1&1&*\\-&1&*\\-&1&1\\1&1&*\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\-\\ *\\1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\-\\ *\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}-&-&-\\-&-&-\\-&-&1\\-&-&1\\1&-&-\\1&-&-\\1&-&1\\1&-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\-\\-\\-\\-\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\ *\\ *\\ *\\ *\end{matrix}\begin{pmatrix}-&1&1\\-&1&1\\-&1&1\\-&1&1\\-&1&1\\-&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\ *\\ *\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&*\\1&1&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\ *\\ *\end{pmatrix},\ \begin{matrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\ *\\ *\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0&1\\-&0&1\\-&1&1\\-&1&1\\1&0&1\\1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\0\\0\\1\\1\\ *\\ *\end{pmatrix}=g(x,y,z).$$

Применив операцию суперпозиции к функциям $g(x,y,z)$ и 0, получим функцию (-0): $g(0,y,0)=(-0)$.

$\square$

3. Описание некоторых максимальных частичных ультраклонов

Отметим, что известны описания всех максимальных клонов функций k-значной логики и частичных функций k-значной логики, всех максимальных гиперклонов и ультраклонов на двухэлементном множестве, а также всех максимальных мультиклонов на двухэлементном множестве [3; 4; 5; 7; 10; 11].

Некоторые максимальные частичные ультраклоны найдены в [1; 6]. Классы K_1, K_2, K_3, являющиеся также максимальными мультиклонами [5], были анонсированы в тезисных работах [8; 9]. Ниже доказывается замкнутость и максимальность классов K_1, K_2, K_3 и двух новых классов K_4, K_5.

Теорема 1. *Каждый из классов* $K_1 - K_5$ *является частичным ультраклоном.*

Доказательство. Очевидно, что K_1 является частичным ультраклоном.

Из определения классов $K_2 - K_5$ следует, что все они замкнуты относительно добавления и удаления несущественных переменных и содержат все проекции. Доказательство замкнутости относительно суперпозиции будем проводить от противного. Пусть

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), g_2(x_1, \ldots, x_n) \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

где $f, g_1, \ldots, g_m$ – произвольные функции из класса K_i, $i \in \{2,3,4,5\}$. Предположим, что $h(x_1, \ldots, x_n) \notin K_i$, где $i \in \{2,3,4,5\}$.

Доказательство для класса K_2.

a) Пусть существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $h(\tilde{\alpha}) = -$ и $h(\bar{\tilde{\alpha}}) = \mu \neq -$, т.е. $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ \mu\end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix}\gamma_i\\ \delta_i\end{pmatrix} \in \{(01)^t, (10)^t, (--)^t\}$.

Множество значений функции f на всевозможных уточнениях набора $\tilde{\gamma}$ совпадает с одним из множеств: 1)$\{-,*\}$, 2)$\{0,1\}$, 3)$\{-\}$, 4)$\{0,1,-\}$, 5)$\{0,1,*\}$, 6)$\{0,-,*\}$, 7)$\{1,-,*\}$, 8)$\{0,1,-,*\}$. В каждом из этих случаев получим противоречие с $f \in K_2$.

Рассмотрим случай 1. Выберем уточнения $\tilde{\tau}^1$ набора $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}^1$ набора $\tilde{\delta}$ такие, что $f(\tilde{\tau}^1) = -$ и $(\tau_i^1 \sigma_i^1) \in \{(01),(10)\}$ для всех $i \in \{1 \ldots m\}$. Когда $f(\tilde{\sigma}^1) \neq -$ сразу получим противоречие. Пусть $f(\tilde{\sigma}^1) = -$. Выберем уточнения $\tilde{\tau}^2$ набора $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}^2$ набора $\tilde{\delta}$ такие, что $f(\tilde{\tau}^2) = *$ и $(\tau_i^2 \sigma_i^2) \in \{(01),(10)\}$ для всех $i \in \{1 \ldots m\}$. Так как $f(\tilde{\delta}) \neq -$, то $f(\tilde{\sigma}^2) \neq *$, противоречие.

Рассмотрим случай 2. Выберем уточнения $\tilde{\tau}^1$ набора $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}^1$ набора $\tilde{\delta}$ такие, что $f(\tilde{\tau}^1) = 0$ и $(\tau_i^1 \sigma_i^1) \in \{(01),(10)\}$ для всех $i \in \{1 \ldots m\}$. Когда $f(\tilde{\sigma}^1) \in \{0,-,*\}$ сразу получим противоречие. Пусть $f(\tilde{\sigma}^1) = 1$.

Выберем уточнения $\tilde{\tau}^2$ набора $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}^2$ набора $\tilde{\delta}$ такие, что $f(\tilde{\tau}^2) = 1$ и $(\tau_i^2\sigma_i^2) \in \{(01),(10)\}$ для всех $i \in \{1\dots m\}$. Так как $f(\tilde{\delta}) \neq -$, то $f(\tilde{\sigma}^2) \in \{1,-,*\}$, противоречие.

В остальных случаях доказательство аналогично.

б) Пусть существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $h(\tilde{\alpha}) = *$ и $h(\bar{\tilde{\alpha}}) = \mu \neq *$. Значит $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\ \mu\end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix}\gamma_i\\ \delta_i\end{pmatrix} \in \{(01)^t,(10)^t,(--)^t\}$.

На любом уточнении набора $\tilde{\gamma}$ значение функции f равно $*$. Выберем уточнения $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}$ набора $\tilde{\delta}$ такие, что $f(\tilde{\sigma}) \neq *$ и $(\tau_i\sigma_i) \in \{(01),(10)\}$ для всех $i \in \{1\dots m\}$, тогда $f(\tilde{\tau}) = *$, а $f(\tilde{\sigma}) \neq *$, противоречие с $f \in K_2$.

в) Пусть существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $h(\tilde{\alpha}) = h(\bar{\tilde{\alpha}}) = \lambda \in \{0,1\}$. Имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix}\gamma_i\\ \delta_i\end{pmatrix} \in \{(01)^t,(10)^t,(--)^t\}$.

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Выберем уточнения $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}$ набора $\tilde{\delta}$ такие, что $f(\tilde{\sigma}) = 0$ и $(\tau_i\sigma_i) \in \{(01),(10)\}$ для всех $i \in \{1\dots m\}$, тогда $f(\tilde{\tau}) \in \{0,-,*\}$, противоречие с $f \in K_2$.

В случае $\lambda = 1$ рассуждения аналогичны.

Доказательство для класса K_3.

а) Пусть существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $h(\tilde{\alpha}) = \mu \neq *$ и $h(\bar{\tilde{\alpha}}) = \eta \neq *$, т.е. $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu\\ \eta\end{pmatrix}$. Имеем $\gamma_i = \bar{\delta}_i$ для всех $i \in \{1,\dots,m\}$, иначе либо одна из функций $g_1,\dots,g_m$ не лежит в классе K_3, либо значение функции f хотя бы на одном из наборов $\tilde{\gamma},\tilde{\delta}$ совпадает со значением $*$, т.е. $\begin{pmatrix}\gamma_i\\ \delta_i\end{pmatrix} \in \{(01)^t,(10)^t\}$, противоречие с $f \in K_3$.

б) Пусть существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $h(\tilde{\alpha}) = h(\bar{\tilde{\alpha}}) = \lambda \in \{0,1\}$, т.е. $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\end{pmatrix}$. Имеем $\gamma_i = \bar{\delta}_i$ для всех $i \in \{1,\dots,m\}$, иначе либо одна из функций $g_1,\dots,g_m$ не лежит в классе K_3, либо значение функции f хотя бы на одном из наборов $\tilde{\gamma},\tilde{\delta}$ совпадает со значением $*$, т.е. $\begin{pmatrix}\gamma_i\\ \delta_i\end{pmatrix} \in \{(01)^t,(10)^t\}$, противоречие с $f \in K_3$.

Доказательство для класса K_4.

а) Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что

$$(\alpha_i\beta_i\gamma_i) \in \{(000),(001),(010),(111)\}$$

для всех $i \in \{1,\dots,n\}$ и

$$h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\tilde{\delta}\\ \tilde{\theta}\\ \tilde{\nu}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ набор $(\delta_i \theta_i \nu_i)^t$ должен совпадать с одним из следующих наборов:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\0\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\-\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\-\\-\end{pmatrix}$$

иначе либо по крайней мере одна из функций $g_1, \dots, g_m$ не лежит в классе K_4, либо значение f на одном из наборов $\tilde{\delta}, \tilde{\theta}, \tilde{\nu}$ равно $*$.

Если $f\begin{pmatrix}\tilde{\delta}\\\tilde{\theta}\\\tilde{\nu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, то, используя леммы 1 и 2, получим $f\begin{pmatrix}\tilde{\delta}^{(0)}\\\tilde{\theta}^{(0)}\\\tilde{\nu}^{(0)}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, противоречие с $f \in K_4$.

В остальных случаях рассуждения аналогичны.

б) Пусть существуют двоичные наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\\tilde{\beta}\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}\\\tilde{\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}$.

Если найдется уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\gamma}$, на котором значение f равно $-$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\\tilde{\sigma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}$, где $\tilde{\sigma}$ – уточнение набора $\tilde{\delta}$ такое, что $f(\tilde{\sigma}) = 1$. Противоречие.

Далее найдутся два уточнения $\tilde{\tau}^1$ и $\tilde{\tau}^2$ этого набора такие, что $f(\tilde{\tau}^1) = 0$ и $f(\tilde{\tau}^2) = 1$. Рассмотрим значение функции f на наборе $\tilde{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_m)$, где $\rho_i = 1$ для таких i, что $\gamma_i = \sigma_i = 1$ и $\rho_i = 0$ для остальных i. Если $f(\tilde{\rho}) \notin \{0, 1\}$, то получим противоречие $f \in K_4$.

Пусть $f(\tilde{\rho}) = 0$. Тогда в силу леммы 2 имеем $f\begin{pmatrix}\tilde{\rho}\\\tilde{\tau}^2\\\tilde{\delta}^{(0)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Пусть $f(\tilde{\rho}) = 1$. Тогда в силу леммы 2 имеем $f\begin{pmatrix}\tilde{\rho}\\\tilde{\tau}^1\\\tilde{\delta}^{(0)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

В обоих случаях получим противоречие с $f \in K_4$.

в) Пусть существуют двоичные наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\\tilde{\beta}\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}\\\tilde{\delta}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}*\\-\end{pmatrix}\right\}$ и $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Если $(\gamma_i \delta_i) = (10)$ для некоторого $i \in \{1, \dots, m\}$, то $g_i\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\\tilde{\beta}\\\tilde{\alpha}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, противоречие с $g_i \in K_4$. Аналогично, $\gamma_i \neq *$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$.

Так как на всех уточнениях набора $\tilde\gamma$ значение функции f равно $*$, то $f\begin{pmatrix}\tilde\gamma^{(0)}\\ \tilde\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\ \eta\end{pmatrix}$, где $\tilde\tau$ — уточнение набора $\tilde\delta$ такое, что $f(\tilde\tau) \neq *$. Противоречие с $f \in K_4$.

Доказательство для класса K_5.

а) Пусть $\tilde\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \tilde\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \tilde\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — двоичные наборы такие, что

$$(\alpha_i\beta_i\gamma_i) \in \{(000), (011), (101), (111)\}$$

для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и

$$h\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\ \tilde\beta\\ \tilde\gamma\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\tilde\delta\\ \tilde\theta\\ \tilde\nu\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ набор $(\delta_i\theta_i\nu_i)^t$ должен совпадать с одним из следующих наборов:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\1\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\-\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\-\\-\end{pmatrix}$$

иначе либо по крайней мере одна из функций $g_1, \dots, g_m$ не лежит в классе K_5, либо значение f на одном из наборов $\tilde\delta, \tilde\theta, \tilde\nu$ равно $*$.

Если $f\begin{pmatrix}\tilde\delta\\ \tilde\theta\\ \tilde\nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, то, используя леммы 3 и 4, получим $f\begin{pmatrix}\tilde\delta^{(1)}\\ \tilde\theta^{(1)}\\ \tilde\nu^{(1)}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-\end{pmatrix}\right\}$, противоречие с $f \in K_5$.

В остальных случаях рассуждения аналогичны.

б) Пусть существуют двоичные наборы $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$ такие, что $h\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\ \tilde\beta\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\tilde\gamma\\ \tilde\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}$.

Если найдется уточнение $\tilde\tau$ набора $\tilde\gamma$, на котором значение f равно $-$, то $f\begin{pmatrix}\tilde\tau\\ \tilde\sigma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}$, где $\tilde\sigma$ — уточнение набора $\tilde\delta$ такое, что $f(\tilde\sigma) = 0$. Противоречие.

Далее найдутся два уточнения $\tilde\tau^1$ и $\tilde\tau^2$ этого набора такие, что $f(\tilde\tau^1) = 0$ и $f(\tilde\tau^2) = 1$. Рассмотрим значение функции f на наборе $\tilde\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$, где $\rho_i = 0$ для таких i, что $\gamma_i = \sigma_i = 0$ и $\rho_i = 1$ для остальных i. Если $f(\tilde\rho) \notin \{0, 1\}$, то получим противоречие с $f \in K_5$.

Пусть $f(\tilde\rho) = 0$. Тогда с силу леммы 3 имеем $f\begin{pmatrix}\tilde\delta^{(1)}\\ \tilde\tau^2\\ \tilde\rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Пусть $f(\tilde{\rho}) = 1$. Тогда с силу леммы 3 имеем $f\begin{pmatrix}\tilde{\delta}^{(1)}\\ \tilde{\tau}^1\\ \tilde{\rho}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

В обоих случаях получим противоречие $f \in K_5$.

в) Пусть существуют двоичные наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\ *\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\ *\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-\\ *\end{pmatrix}\right\}$ и $\alpha_i \le \beta_i$ для всех $i \in \{1,\dots,n\}$.

Если $(\gamma_i\delta_i) = (10)$ для некоторого $i \in \{1,\dots,m\}$, то $g_i\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, противоречие с $g_i \in K_5$. Аналогично $\gamma_i \ne *$ для всех $i \in \{1,\dots,m\}$.

Так как на всех уточнениях набора $\tilde{\tilde{\delta}}$ значение функции f равно $*$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\delta}^{(1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta\\ *\end{pmatrix}$, где $\tilde{\tau}$ – уточнение набора $\tilde{\gamma}$ такое, что $f(\tilde{\tau}) \ne *$. Противоречие с $f \in K_5$.

$\square$

Теорема 2. *Каждый из классов $K_1 - K_5$ является максимальным.*

Доказательство. Покажем, что множество $[K_i \bigcup \{f\}]$ совпадает с $P_2^{\overline{*}}$, где f не принадлежит классу K_i, $i \in \{1,2,3,4,5\}$.

Доказательство для класса K_1.

Нетрудно проверить, что классу K_1 принадлежат функции:

$$(01), (0*), (1*), (*0), (*1), (-01*), (*01-), (01-*).$$

Если $f \notin K_1$, то после отождествления переменных в f получим одну из функций:

$$(--), (00), (11), (10), (0-), (-1), (-0), (1-).$$

Первый случай с помощью функции $(0*)$ сводится ко второму. Из функций $(0-), (-1)$ легко получить константы 0 и 1. Второй, третий, четвертый случаи с помощью функций $(-01*)$, $(01-*)$, $(*01-)$ сводятся к двум последним. В оставшихся двух случаях по лемме 5 получим $[K_1 \bigcup \{f\}] = P_2^{\overline{*}}$.

Доказательство для класса K_2.

Нетрудно проверить, что в классе K_2 лежат функции:

$$(01), (10), (--), (**), (1--0), (1**0).$$

Если $f \notin K_2$, то с помощью суперпозиции функции f с функциями $(01), (10)$, а также путем отождествления переменных получим одну из следующих унарных функций:

$$(00), (11), (0-), (0*), (1*), (1-), (-0), (-1), (-*), (*0), (*1), (*-).$$

Каждый из этих случаев с помощью функций из класса K_2 сводится к константам 0 или 1. Случаи $(0-), (0*), (1*), (1-), (-0), (-1), (*0), (*1)$ очевидны. В случае $(-*)$ имеем $\begin{array}{c}0\\0\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}0 & -\\1 & *\\0 & -\\1 & *\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ *\\0\\ *\end{pmatrix}, \begin{array}{c}0\\ *\\0\\ *\end{array}\begin{pmatrix}0 & -\\0 & -\\1 & -\\1 & -\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$

Из функций $(1--0), (1**0)$ с помощью функций $(00), (11)$ легко получить функции $(-0), (*0), (1-), (1*)$. В силу леммы 5 получим $[K_2 \bigcup \{f\}] = P_2^{\overline{*}}$.

Доказательство для класса K_3.

Нетрудно проверить, что в классе K_3 лежат функции:

$$(01), (10), (0*), (1*), (-*), (*0), (*1), (*-), (**), (001*), (1-*0).$$

Если $f \notin K_3$, то с помощью суперпозиции функции f с функциями $(01), (10)$, а также путем отождествления переменных получим одну из следующих унарных функций:

$$(00), (11), (--), (0-), (1-), (-0), (-1).$$

Каждый из этих случаев с помощью функций из класса K_3 сводится к константам 0 или 1. Случаи $(0-), (-0), (-1), (1-)$ очевидны. В случае $(--)$ имеем $\begin{array}{c}0\\0\\1\\ *\end{array}\begin{pmatrix}- & 0\\- & 0\\- & 1\\- & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\-\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{array}{c}-\\-\\0\\0\end{array}\begin{pmatrix}- & 0\\- & 0\\- & 1\\- & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$

Из функции $(1-*0)$ с помощью функций $(00), (11)$ легко получить функции $(-0), (1-)$. В силу леммы 5 получим $[K_3 \bigcup \{f\}] = P_2^{\overline{*}}$.

Доказательство для класса K_4.

Нетрудно проверить, что в классе K_4 лежат функции:

$$(00), (01), (11), (0-), (-0), (--), (0*), (1*), (-*), (**), (0001).$$

a) Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что

$$(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (001), (010), (111)\}$$

для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и

$$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Суперпозицией функции f и функций $(0001), (0011), (0101), (1111)$, а затем отождествлением переменных, получим бинарную функцию вида: $(011\theta), (100\lambda), (101\lambda), (110\lambda)$, где $\theta, \lambda \in \{0, 1, -, *\}$.

Из функций (100λ), (110λ), (101λ) с помощью функций (00) и $(0*)$ легко получить функцию $(*0)$.

Если $\theta = 0$, то $\begin{array}{c} 0\\ 0\\ 1\\ 1 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & -\\ 1 & 0\\ 0 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\\ - \end{pmatrix}$, $\begin{array}{c} 0\\ 1\\ 1\\ - \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -\\ - \end{pmatrix}$.

Если $\theta \neq 0$, то $\begin{array}{c} 0\\ 1\\ 1\\ \theta \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -\\ 1 & -\\ 0 & -\\ 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\\ -\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, получим одну из функций $(*0), (1-), (-1)$. Так как класс K_4 содержит функции $(-0), (0-), (0*), (1*)$, то по лемме 5 получим $[K_4 \bigcup \{f\}] = P_2^{\overline{*}}$.

б) Пусть существуют наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\\ 1 \end{pmatrix}$.

Суперпозицией функции f и функций $(0001), (0011), (0101), (1111)$, а затем отождествлением переменных, получим бинарную функцию, имеющую вид $(\eta - 1\theta)$. Если $\eta \in \{1, -, *\}$, то легко получим одну из функций $(-1), (1-), (*1)$. Из функции $(*1)$ с помощью функции (00) получим функцию $(*0)$. Если $\theta \in \{1, -\}$, то легко получим одну из функций $(1-), (-1)$.

Оставшиеся функции $(0-10), (0-1*)$ с функциями из K_4 позволяют получить функции $(1-), (-1)$:

$$\begin{array}{c} 0\\ -\\ 1\\ 0 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & -\\ 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -\\ - \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{c} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ - & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ * & 0 & 0\\ 0 & 0 & *\\ - & 0 & *\\ 1 & 0 & *\\ * & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ -\\ 1\\ *\\ *\\ *\\ *\\ * \end{pmatrix}, \begin{array}{c} 0\\ -\\ 1\\ *\\ *\\ *\\ *\\ * \end{array}\begin{pmatrix} - & 0 & -\\ - & 0 & -\\ - & 0 & -\\ - & 0 & -\\ - & 1 & -\\ - & 1 & -\\ - & 1 & -\\ - & 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\\ -\\ -\\ -\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим одну из функций $(*0), (1-), (-1)$. Так как класс K_4 содержит функции $(0-), (0*), (1*), (--)$, то по лемме 5 получим $[K_4 \bigcup \{f\}] = P_2^{\overline{*}}$.

в) Пусть существуют наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} *\\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} *\\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} *\\ - \end{pmatrix} \right\}$ и $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Применяя операцию суперпозиции к функции f и функциям (00), (11), а затем отождествив переменные, получим одну из следующих унарных функций: $(*0),(*1),(*-)$. Функции $(*1),(*-)$, используя функцию (00), сведем к функции $(*0)$. Так как класс K_4 содержит функцию (-0), то по лемме 5 получим $[K_4\bigcup\{f\}]=P_2^{\overline{*}}$.

Доказательство для класса K_5.

Нетрудно проверить, что в классе K_5 лежат функции:

$$(00),(01),(11),(1-),(-1),(--),(*0),(*1),(*-),(**),(0111).$$

а) Пусть $\tilde\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\tilde\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n),\tilde\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что

$$(\alpha_i\beta_i\gamma_i)\in\{(000),(011),(101),(111)\}$$

для всех $i\in\{1,\dots,n\}$ и

$$f\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\ \tilde\beta\\ \tilde\gamma\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Суперпозицией функции f и функций $(0000),(0011),(0101),(0111)$, а затем отождествлением переменных, получим бинарную функцию вида: $(\theta001),(\lambda010),(\lambda100),(\lambda110)$, где $\theta,\lambda\in\{0,1,-,*\}$.

Из функций $(\lambda010),(\lambda100),(\lambda110)$, с помощью функций (11) и $(*1)$, легко получить функцию $(1*)$.

Функция $(\theta001)$ позволяет получить функцию $(0-)$: $\begin{matrix}\theta\\0\\0\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\1&-\\1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\\-\end{pmatrix}$

Таким образом, получим одну из функций $(1*),(0-)$. Так как класс K_5 содержит функции $(-1),(1-),(*0)$, то в силу леммы 5 получим $[K_5\bigcup\{f\}]=P_2^{\overline{*}}$.

б) Пусть существуют наборы $\tilde\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $\tilde\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ такие, что $f\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\ \tilde\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}$.

Суперпозицией функции f и функций $(0000),(0011),(0101),(0111)$, а затем отождествлением переменных, получим бинарную функцию, имеющую вид $(\eta-0\theta)$. Если $\theta\in\{0,-,*\}$, то легко получим одну из функций $(-0),(0-),(0*)$. Из функции $(0*)$ с помощью функции (11) получим функцию $(1*)$. Если $\eta\in\{0,-\}$, то легко получим одну из функций $(0-),(-0)$.

Оставшиеся функции $(1-01),(*-01)$ с функциями из K_5 позволяют получить функцию (-0):

$$\begin{array}{c}1\\-\\0\\1\end{array}\begin{pmatrix}0&1\\0&-\\1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{array}{c}-\\1\\0\\1\end{array}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{c}*\\-\\0\\1\end{array}\begin{pmatrix}0&1\\0&-\\1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{array}{c}-\\-\\0\\1\end{array}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим одну из функций $(1*), (0-), (-0)$. Так как класс K_5 содержит функции $(-1), (*0), (*1), (--)$, то по лемме 5 получим $[K_5 \bigcup \{f\}] = P_2^{\overline{*}}$.

в) Пусть существуют наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\ *\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\ *\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-\\ *\end{pmatrix}\right\}$ и $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Применяя операцию суперпозиции к функции f и функциям (00), (11), а затем отождествив переменные, получим одну из следующих унарных функций: $(0*), (1*), (-*)$. Функции $(0*), (-*)$, используя функцию (11), сведем к функции $(1*)$. Так как класс K_5 содержит функцию $(1-)$, то по лемме 5 получим $[K_5 \bigcup \{f\}] = P_2^{\overline{*}}$. □

Работа выполнена при поддержке гранта Бурятского государственного университета.

Список литературы

1. Бадмаев С. А. О максимальных клонах частичных ультрафункций на двухэлементном множестве / С. А. Бадмаев, И. К. Шаранхаев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия Математика. – 2016. – Т. 16. – С. 3–18.
2. Бадмаев С. А. О полных множествах частичных ультрафункций на двухэлементном множестве / С. А. Бадмаев // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика. – 2015. – № 3. – С. 61–67.
3. Ло Джукай. Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики / Ло Джукай // Кибернет. сб. Нов. сер. – 1988. – Вып. 25. – С. 131–141.
4. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. – 2009. – № 2 (68). – С. 60–79.
5. Пантелеев В. И. Критерий полноты для недоопределенных частичных булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. – 2009. – Т. 9, № 3. – С. 95–114.
6. Пантелеев В. И. О двух максимальных мультиклонах и частичных ультраклонах / В. И. Пантелеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 46–53.
7. Тарасов В. В. Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики / В. В. Тарасов // Проблемы кибернетики. Вып. 30. – М. : Наука, 1975. – С. 319–325.

Известия Иркутского государственного университета.
2017. Т. 21. Серия «Математика». С. 3–18

8. Халбашкеева Т. Ю. Некоторые максимальные частичные ультраклоны ранга 2 // Материалы юбил. 50-й МНСК "Студент и научно-технический пргресс. Математика". – 2012. – С. 20.
9. Халбашкеева Т. Ю. О некоторых частичных ультраклонах // Материалы 4-й рос. школы-семинара "Синтаксис и семантика логических систем". – 2012. – С. 129-131.
10. Haddad L. A Maximal Partial Clone and Slupecki-type Criterion / L. Haddad, I. G. Rosenberg, D. Schweigert // Acta Sci. Math. – 1990. – Vol. 54. – P. 89–98.
11. Rosenberg I. G. Uber die Verschiedenheit Maximaler Klassen in P_k, // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 1969. – Vol. 14. – P. 431–438.

Бадмаев Сергей Александрович, Институтматематики и информатики, Бурятский государственный университет, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а тел.: (3012)219757 (e-mail: badmaevsa@mail.ru)

S. A. Badmaev
On Some Maximal Partial Ultraclones on a Two-Element Set

Abstract. Multifunctions on a two-element set are considered in this paper. Functions from finite set to set of all subsets of this set are called multifunctions. It is obvious that the superposition in the usual sense not appropriate for multifunctions, therefore, we need to expand the standard concept of superposition. Sets of multifunction closed with respect to the operation of "expanded" superposition are called multiclones and partial ultraclones depending on the type of superposition.

In the theory of discrete functions the classical problem is description of lattice of clones. Because of difficulty of this problem lattice fragments are studied, for example, the minimum and maximum elements, different intervals. In particular, we note that the descriptions of all maximal clones are known for k-valued logic functions, partial functions on k-element sets, the descriptions of all maximal hyperclones and ultraclones on a two-element set, multiclones on a two-element set are known. In this work the problem of description of of some maximal ultraclones on a two-element set is considered.

Keywords: multifunction, superposition, multiclone, partial ultraclone, maximal ultraclone.

References

1. Badmaev S.A., Sharankhaev I.K. On Maximal Clones of Partial Ultrafunctions on a Two-element Set (in Russian). *Izvestiya Irk. Gos. Univ. Ser. Matematika*, 2016, vol. 16, pp. 3-18.
2. Badmaev S.A. On Complete Sets of Partial Ultrafunctions on a Two-element Set (in Russian). *Vestnik Buryat. Gos. Univ. Matem., Inform.*, 2015, no 3, pp. 61-67.
3. Lo Czu Kai. Maximal closed classes in the set of partial functions on multi valued logic. *Kiberneticheskiy Sbornik. Novaya seriya.*, 1988, no 25, pp. 131-141.
4. Panteleyev V.I. Completeness Criterion for Incompletely Defined Boolean Functions (in Russian). *Vestnik Samar. Gos. Univ. Est.-Naush. Ser.*, 2009, vol. 2, no 68, pp. 60-79.

5. Panteleyev V.I. Completeness Criterion for Sub-defined Partial Boolean Functions (in Russian). *Vestnik Novosibir. Gos. Univ. Ser.: Matem., Mechan., Inform.*, 2009, vol. 9, no 3, pp. 95-114.
6. Panteleyev V.I. On Two Maximal Multiclones and Partial Ultraclones (in Russian). *Izvestiya Irk. Gos. Univ. Ser. Matematika*, 2012, vol. 5, no 4, pp. 46-53.
7. Tarasov V. V. Completeness Criterion for Partial Logic Functions (in Russian). *Problemy Kibernetiki*, 1975, vol. 30, pp. 319-325.
8. Khalbashkeeva T. U. Some Maximal Ulatraclones of Range 2 (in Russian). *Proceedings of the 50th ISSC Students and Progress in Science and Technology. Math*, 2012, p. 20.
9. Khalbashkeeva T. U. On Some Partial Ultraclones (in Russian). *Proceedings of the 4th Russian School Workshop Syntax and Semantics of Logical Systems*, 2012, pp. 129-131.
10. Haddad L., Rosenberg I. G., Schweigert D. A Maximal Partial Clone and Slupecki-type Criterion. *Acta Sci. Math.*, 1990, vol. 54, pp 89-98.
11. Rosenberg I. G. Uber die Verschiedenheit Maximaler Klassen in P_k. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1969, vol. 14, pp. 431-438.

Badmaev Sergey Alexandrovich, Buryat State University, 24a, Smolin st., Ulan-Ude, 670000 tel.: (3012)219757
(e-mail: badmaevsa@mail.ru)