Серия «Математика»
2015. Т. 14. С. 82—99

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.518.15

О роли метода возмущений и теоремы Банаха – Штейнгауза в вопросах регуляризации уравнений первого рода*

Н. А. Сидоров
Иркутский государственный университет

Д. Н. Сидоров
Институт систем энергетики им. Л. А. Малентьева СО РАН
Иркутский государственный университет

И. Р. Муфтахов
Иркутский государственный технический университет

Аннотация. Построены регуляризирующие уравнения с векторным параметром регуляризации для линейных уравнений с замкнутым оператором в банаховых пространствах. Область значений оператора может быть незамкнутой, однородное уравнение может иметь нетривиальное решение. Предполагается, что заданы приближения оператора и правой части. Даны условия, когда вспомогательное регуляризирующее уравнение имеет единственное решение. Установлены теоремы сходимости регуляризованное решения к B-нормальному решению точного уравнения и получены оценки погрешности метода как в в детерминированном, так и в стохастическом случаях. Даны рекомендации по выбору стабилизирующего оператора и векторного параметра регуляризации. Предложенная в работе абстрактная схема построения регуляризирующих уравнений применена к проблеме устойчивого дифференцирования.

Ключевые слова: регуляризирующее уравнение, стабилизирующий оператор, B-нормальное решение, теорема Банаха – Штейнгауза, замкнутый оператор, метод возмущений, устойчивое дифференцирование.

Введение

Пусть A — замкнутый линейный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения $D(A)$ и с областью значений

* Работа выполнена при частичной поддержке программы международного научно-технического сотрудничества Китая, грант 2015DFR70850.

$R(A)$ в банаховом пространстве Y. Рассмотрим уравнение

$$Ax = f, \ \ f \in R(A). \tag{0.1}$$

В настоящей статье не предполагается, что $\mathcal{N}(A) = \{0\}$. Область $R(A)$ может быть не замкнутой. На практике приходится решать приближенное уравнение

$$\tilde{A}x = \tilde{f}, \tag{0.2}$$

где $\tilde{A}$ и $\tilde{f}$ суть δ-приближения A и f соответственно, понимаемые в следующем смысле $(a > 0)$:

$$||\tilde{A}x - Ax|| \leq \delta(||x|| + a||Ax||), \, \forall x \in D, \ \ ||\tilde{f} - f|| \leq \delta. \tag{0.3}$$

Если A — ограниченный оператор, то $D = X$ и можно положить $a = 0$. Задача построения какого-либо решения уравнения (0.1) в общем случае является неустойчивой и требует регуляризации при практических вычислениях. Как известно, основополагающие результаты в теории регуляризации и методах решения обратных задач были получены в трудах научных школ академика А. Н. Тихонова, член-корреспондента В. К. Иванова и академика М. М. Лаврентьева. В настоящее время соответствующий раздел математики получил большое развитие и позволил решить ряд важных задач, относящихся к наиболее сложным в современной науке и технике [20; 3; 19; 5; 4; 22; 30]. Разработаны различные методы регуляризации, в том числе для уравнений вида (0.1). К числу наиболее эффективных следует отнести метод А. Н. Тихонова введения стабилизирующего функционала, метод квазирешений В. К. Иванова, метод невязки, метод возмущений М. М. Лаврентьева и некоторые другие методы. Важную роль в созданной теории сыграли вариационные подходы, спектральная теория, теория возмущений, методы функционального анализа [21], гл. 3, 5. В этой же плоскости лежит результат академика В.П. Маслова [7] , установившего эквивалентность существования решения некорректной задачи и сходимости регуляризационного процесса, результат С. Б. Стечкина относительно приближений неограниченных операторов [18] и некоторые другие результаты известных математиков ([5] и др.). Особо отметим возрастающую роль методов регуляризации в междисциплинарных исследованиях и приложениях, связанных с обработкой сигналов [28], численным дифференцированием [32] и решением обратных задач при моделировании электроэнергетических систем.

В этой статье, использующей методы и терминологию работ [12; 28; 26], изучается регуляризация линейного уравнения (0.2) посредством введения возмущенного уравнения

$$Ax_\alpha + B(\alpha)x_\alpha = f. \tag{0.4}$$

Такой метод регуляризации был предложен М.М. Лаврентьевым для случая, когда A — вполне непрерывный, самосопряженный оператор, а $B(\alpha) \equiv \alpha$. Как и ранее, стабилизирующий оператор $B(\alpha)$ (кратко, СО) будем выбирать так, чтобы обеспечить единственность решения x_α и устойчивость вычислений. Параметр $\alpha \in S \subset \mathbb{R}^n$, где S — открытое множество, границе которого принадлежит ноль (кратко, S-секторальная окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$), $\lim\limits_{S \ni \alpha \to 0} B(\alpha) = 0$, назовем векторным параметром регуляризации. Параметр α будем согласовывать с уровнем погрешности δ входных данных.

Отметим, что в монографиях [12], [29] и в работах [9; 10], рассматривался случай скалярного параметра регуляризации $\alpha \in \mathbb{R}^1$, а в работах [10; 26] предполагалось, что A — ограниченный оператор. Случай, когда известно математическое ожидание погрешности правой части в работах [9; 10; 12; 29] не рассматривался. Подробно рассматривался только простой случай, когда $B(\alpha) = B_0 + \alpha B_1$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Отметим, что такой СО с $\alpha \in \mathbb{R}^1$ нашел применение в ряде исследований [12; 29]. Например, при разработке и обосновании итерационных методов вычисления фредгольмовых точек λ_0, нулей и элементов обобщенных жордановых наборов оператор-функций [6; 11], при построении приближенных методов в теории ветвления решений нелинейных операторных уравнений с параметрами [29; 14; 16; 15], при построении решений дифференциально-операторных уравнений с необратимым операторным коэффициентом в главной части [29]. Предлагаемая в настоящей статье теория построения регуляризованного процесса с использованием стабилизирующего оператора $B(\alpha)$ с векторным параметром α позволяет регуляризировать широкий класс уравнений, расширяя область приложений метода возмущений.

Перечислим результаты нашей статьи: в п. 1 получены достаточные условия (см. основную теорему), когда возмущенное уравнение (0.4) порождает регуляризационный процесс; в п. 2 даны рекомендации по выбору стабилизирующего оператора $B(\alpha)$; в п. 3 регуляризирующее уравнения вида (0.4) применено в разработке алгоритма регуляризованного дифференцирования. Важную роль в обосновании регуляризационных свойств метода возмущений сыграла классическая теорема Банаха – Штейнгауза о точечной сходимости последовательности операторов.

1. Основная теорема о регуляризации методом возмущений

Наряду с уравнениями (0.1), (0.2), (0.4), введем уравнения

$$(Ax + B(\alpha))x = f, \tag{1.1}$$

$$(\tilde{A}x + B(\alpha))x = \tilde{f}. \tag{1.2}$$

Ошибки при вычислениях $B(\alpha)$ всегда можно включить в оператор $\tilde{A}$. Уравнение (1.2) будем называть регуляризованным уравнением (РУ) для задачи (0.2). Далее везде предполагаются выполненными оценки

$$||(A+B(\alpha))^{-1}|| \le c(|\alpha|), \tag{1.3}$$

$$||B(\alpha)|| \le d(|\alpha|), \tag{1.4}$$

где $c(|\alpha|)$ — непрерывная функция, $\alpha \in S \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \overline{S}$,

$$\lim_{|\alpha|\to 0} c(|\alpha|) = \infty, \ \lim_{|\alpha|\to 0} d(|\alpha|) = 0.$$

Если x^* — решение уравнения (0.1), то получим тождество

$$(A+B(\alpha))^{-1}f - x^* = (A+B(\alpha))^{-1}B(\alpha)x^*.$$

Поэтому справедлива

Лемма 1. *Пусть x^* — некоторое решение уравнения (0.1), $x(\alpha)$ удовлетворяет уравнению (0.4). Тогда для того чтобы $x_\alpha \to x^*$ при $S \ni \alpha \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$S(\alpha, x^*) = ||(A+B(\alpha))^{-1}B(\alpha)x^*|| \to 0 \text{ при } S \ni \alpha \to 0. \tag{1.5}$$

Следуя [12], введем

Определение 1. *Условие (1.5) назовем условием стабилизации, оператор $B(\alpha)$, удовлетворяющий (1.5), стабилизирующим оператором, а решение x^* — B-нормальным решением уравнения (0.1).*

Замечание 1. Очевидно, что в силу единственности предела последовательности $\{x_\alpha\}$ в нормированных пространствах у уравнения (0.1) может быть только одно B-нормальное решение.

Из оценок (1.3)–(1.4), вытекает

Лемма 2. *Пусть x_α и $\hat{x}_\alpha$ — решения соответственно уравнений (0.4) и (1.1). Если параметр $\alpha = \alpha(\delta) \in S$ выбран так, что при $\delta \to 0$*

$$|\alpha(\delta)| \to 0 \text{ и } \delta c(|\alpha(\delta)|) \to 0, \tag{1.6}$$

то $\lim\limits_{\delta\to 0} ||x_\alpha - \hat{x}_\alpha|| = 0.$

Определение 2. *Условие (1.6) назовем условием согласования векторного параметра α с уровнем погрешности исходных данных δ.*

Далее условие согласования предполагается выполненным и для краткости факт зависимости α от δ в обозначениях опускается.

Лемма 3. *Пусть выполнены оценки (1.3)–(1.4) и условие согласования (1.6) параметра регуляризации. Фиксируем* $q \in (0,1)$ *и найдем* $\delta > 0$ *такое, чтобы при* $\delta \leq \delta_0$ *выполнялось неравенство*

$$\delta(a + (1 + ad(|\alpha|))c(|\alpha|)) \leq q. \tag{1.7}$$

Тогда оператор $\tilde{A} + B(\alpha)$ *непрерывно обратим и выполнены оценки*

$$||(\tilde{A} + B(\alpha))^{-1}|| \leq \frac{||(A + B(\alpha))^{-1}||}{1 - q}, \tag{1.8}$$

$$||(\tilde{A} + B(\alpha))^{-1} f|| \leq \tag{1.9}$$

$$\leq ||(A + B(\alpha))^{-1} f|| + \delta \frac{c(|\alpha|)}{1 - q} \left(a||f|| + (1 + ad(|\alpha|))||(A + B(\alpha))^{-1} f|| \right).$$

Доказательство. На основании оценки (0.3) для $\forall f$ имеем

$$||(\tilde{A} - A)(A + B(\alpha))^{-1} f|| \leq$$

$$\leq \delta \left(||(A + B(\alpha))^{-1} f|| + a||(A + B(\alpha) - B(\alpha))(A + B(\alpha))^{-1} f|| \right) \leq$$

$$\leq \delta \left(a||f|| + (1 + a||B(\alpha)||)||(A + B(\alpha))^{-1} f|| \right) \leq$$

$$\leq \delta \left(a||f|| + (1 + ac(|\alpha|))||(A + B(\alpha))^{-1} f|| \right). \tag{1.10}$$

Поэтому, с учетом оценок (1.3), (1.4), (1.7), имеем неравенство

$$||(\tilde{A} - A)(A + B(\alpha))^{-1} f|| \leq \delta(a + (1 + a||B(\alpha)||)c(|\alpha|)) \leq \tag{1.11}$$

$$\leq \delta(a + (1 + ad(|\alpha|))c(|\alpha|)) \leq q||f||.$$

Если теперь учесть, что $q < 1$,

$$\tilde{A} + B(\alpha) = (I + (\tilde{A} - A)(A + B(\alpha))^{-1})(A + B(\alpha)),$$

то существование обратного оператора $(\tilde{A} + B(\alpha))^{-1}$, а также оценка (1.8) его нормы следуют из известной теоремы об обратном операторе. Далее воспользовавшись операторным тождеством

$$C^{-1} = D^{-1} - D^{-1}(I + (C - D)D^{-1})^{-1}(C - D)D^{-1}$$

при $C = (\tilde{A} + B(\alpha))$, $D = A + B(\alpha)$ и неравенствами (1.10), (1.11), придем к оценке (1.9). □

Теорема 1 (Основная теорема). *Пусть согласно лемме 3 выполнены условия согласования параметра* α *с величиной* δ *— уровнем погрешности задания входных данных. Тогда регуляризованное уравнение*

(1.2) имеет единственное решение $\tilde{x}_\alpha$. Если при этом x^* — решение точного уравнения (0.1), то справедлива оценка

$$||\tilde{x}_\alpha - x^*|| \le S(\alpha, x^*) + \frac{\delta c(|\alpha|)}{1-q}\bigg(1 + a||f|| + ||x^*|| + ac(|\alpha|)||x^*|| + \\ +(1 + ad(|\alpha|))S(\alpha, x^*)\bigg). \tag{1.12}$$

Если кроме того элемент x^* — суть B-нормальное решение уравнения (0.1), то последовательность $\{\tilde{x}_\alpha\}$ при $\alpha \to 0$ сходится к x^* со скоростью, определяемой оценкой (1.12).

Доказательство. Существование и единственность последовательности $\{\tilde{x}_\alpha\}$, как решения регуляризованного уравнения (1.2) при $\alpha \in S$, установлено в лемме 3. Так как

$$(\tilde{A} + B(\alpha))(\tilde{x}_\alpha - x^*) = \tilde{f} - f - (\tilde{A} - A)x^* - B(\alpha)x^*,$$

то на основании доказанных оценок (1.8), (1.9) и оценки (1.4), получим искомое неравенство (1.12):

$$||\tilde{x}_\alpha - x^*|| \le ||(\tilde{A} + B(\alpha))^{-1}||(||\tilde{f} - f|| + ||(\tilde{A} - A)x^*|| + ||(\tilde{A} + B(\alpha))^{-1}B(\alpha)x^*||)$$

$$\le \frac{\delta}{1-q}c(|\alpha|)(1 + ||x^*|| + a||x^*||) + S(\alpha, x^*) +$$

$$+\frac{\delta}{1-q}c(|\alpha|)(a||B(\alpha)x^*|| + (1 + a||B(\alpha)||))S(\alpha, x^*) \le$$

$$\le S(\alpha, x^*) + \frac{\delta c(|\alpha|)}{1-q}\bigg(1 + a||f|| + ||x^*|| + ad(|\alpha|)||x^*|| + (1 + ad(|\alpha|))S(\alpha, x^*)\bigg).$$

Так как x^* — суть B-нормальное решение, то $\lim\limits_{\alpha\to 0} S(\alpha, x^*) = 0$. При этом $\lim\limits_{\delta\to 0} \delta c(|\alpha|) = 0$ в силу условия согласования параметра регуляризации α с уровнем погрешности δ. Следовательно, в силу оценки (1.12) $\lim\limits_{\delta\to 0} ||\tilde{x}_\alpha - x^*|| = 0$. Теорема доказана. □

Усиление теоремы 1

Пусть L – линейный оператор и вместо условия стабилизации (1.5) выполнено условие

$$\lim_{\alpha\to 0} ||(A + B(\alpha))^{-1}(B(\alpha)x^* - ||B(\alpha)||Lf)|| = 0.$$

Тогда аналогичную теорему можно доказать для единственного решения $\tilde{x}_\alpha$ более широкого класса РУ вида

$$(\tilde{A} + B(\alpha))\tilde{x}_\alpha = \tilde{f} + ||B(\alpha)||L\tilde{f}. \tag{1.13}$$

1.1. Вероятностные оценки нормы погрешности вычислений

Пусть в условиях теоремы 1 известно математическое ожидание погрешности задания правой части уравнения (0.1), определяемой экспериментально. Тогда можно оценить математическое ожидание точности регуляризирующего алгоритма $(\tilde{A}+B(\alpha))^{-1}\tilde{f}$. Для простоты рассуждений, предположим, что A – ограниченный оператор, $||\tilde{A}-A|| \leq \delta$. Т.к.

$$\tilde{x}_\alpha - x^* = (\tilde{A}+B(\alpha))^{-1}(\tilde{f}-f-(\tilde{A}-A)x^*-B(\alpha)x^*),$$

то в силу оценки (1.9), в которой в силу ограниченности оператора A надо положить $a=0$, имеем неравенство

$$||\tilde{x}_\alpha - x^*|| \leq ||(A+B(\alpha))^{-1}[\cdots]|| + \delta\frac{c(|\alpha|)}{1-q}||(A+B(\alpha))^{-1}[\cdots]||.$$

Здесь $[\cdots] := \Delta f - \Delta A x^* - B(\alpha)x^*$, $\delta c(\alpha) \leq q < 1$, $\lim\limits_{\delta\to 0}\delta c(|\alpha|) \to 0$. В этих оценках все величины, кроме $||\Delta f||$ (погрешности задания правой части в уравнении (0.1)), являются детерминированными. Поэтому, учитывая свойство линейности математического ожидания, получим при $\forall\delta \in [0,\delta_0]$, где $\delta_0 c(|\alpha|) \leq q < 1$, $\alpha = \alpha(\delta_0)$, $\lim\limits_{\delta_0\to 0}\delta_0(|\alpha(\delta_0)|) = 0$, неравенство

$$\mathcal{M}(||\tilde{x}_\alpha - x^*||) \leq \frac{1}{1-q}\{\delta||x^*|| + S(\alpha,x^*) + (|\alpha|)\,\mathcal{M}(||\Delta f||)\}. \qquad (1.14)$$

Квазиоптимальное α можно определить из условия минимума правой части этой оценки. Используя неравенство Маркова $\mathcal{P}\left(||\tilde{x}_0 - x^*|| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathcal{M}(||\tilde{x}_0-x^*||)}{\varepsilon}$, получим оценку сверху вероятности погрешности

$$\mathcal{P}(||\tilde{x}_\alpha - x^*|| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\left\{q||x^*|| + S(\alpha,x^*) + c(|\alpha|)\mathcal{M}(||\Delta f||)\right\}$$

при $\forall\varepsilon > 0$.

Чтобы приведенная оценка вероятности $\mathcal{P}\left(||\tilde{x}_\alpha - x^*|| \geq \varepsilon\right)$ была информативной, параметр регуляризации α следует согласовывать с величинами ΔA, $\mathcal{M}(||\Delta f||)$ и ε.

Отметим, что для практических приложений доказанной теоремы надо иметь рекомендации по выбору стабилизирующего оператора $B(\alpha)$. Полезно знать необходимые и достаточные условия существования B-нормального решения x^* точного уравнения (0.1). Эти вопросы рассмотрим ниже в п. 2.

2. Выбор стабилизирующего оператора $B(\alpha)$, необходимые и достаточные условия существования B-нормального решения и классы корректности задачи (0.1)

Если A — фредгольмов оператор, $\{\phi_i\}_1^n$ — базис в $\mathcal{N}(A)$, $\{\psi_i\}_1^n$ — базис в $\mathcal{N}^*(A)$, то, как известно, (см., например, п.22 в [21]), можно положить $B(\alpha) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$, где $\{\gamma_i\}$, $\{z_i\}$ выбираются так, чтобы $\det[\langle \phi_i, \gamma_k \rangle]_{i,k=1}^n \neq 0$, $\langle z_i, \psi_k \rangle = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$ При этом уравнение

$$Ax = f - \sum_{i=1}^{n} \langle f, \psi_i \rangle z_i \tag{2.1}$$

будет разрешимо для любых f.

Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{f}$ — суть δ-приближения A и f, удовлетворяющие оценкам (0.3). Тогда возмущенное уравнение

$$\tilde{A}x + \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i \rangle z_i = \tilde{f} - \sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{f}, \psi_i \rangle z_i$$

имеет единственное решение $\tilde{x}$. При этом $||\tilde{x} - x^*|| \to 0$ при $\delta \to 0$, где x^* — единственное решение точного уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям $\langle x^*, \gamma_i \rangle = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Таким образом, в случае фредгольмова оператора A в качестве стабилизирующего оператора можно брать независящий от параметра α конечномерный оператор $B = \sum\limits_{1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$ (см. [21], п. 22). Именно такой способ регуляризации итерационных методов использовался нами в работах [16; 15], [29; 28] при исследовании бифуркации решений нелинейных уравнений 2го рода с параметрами. Конечно при таком выборе СО B требуется иметь информацию о ядре оператора A и его дефектном подпространстве. Поэтому представляет интерес дать рекомендации по выбору СО $B(\alpha)$ без использования такой информации. В случае бифуркации решений некоторые результаты в этом направлении для уравнений 2го рода см. [12; 29].

Важно изучить вопрос и в более сложной проблеме решения уравнений первого рода, когда область значений оператора A незамкнута. Отметим, что в работах [10; 9] и монографиях [12; 29] СО строился для уравнений первого рода в виде $B_0 + \alpha B_1$, где $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Ниже мы приведем обобщение этих результатов на случай, когда $B = B(\alpha)$, где $\alpha \in S \subset \mathbb{R}^n$. Из ниже доказанных теорем 2 –4 как частный случай будет вытекать ряд результатов работ [9; 10; 12; 26].

Теорема 2. *Пусть при $\alpha \in S \subset \mathbb{R}^n$ справедливы оценки*

$$||(A+B(\alpha))^{-1}|| \leq c(|\alpha|),\ ||B(\alpha)|| \leq d(|\alpha|),$$

$c(|\alpha|)$, $d(|\alpha|)$ — непрерывные функции, $\lim\limits_{|\alpha|\to 0} c(|\alpha|) = \infty$, $\lim\limits_{|\alpha|\to 0} d(|\alpha|) = 0$. Пусть $\lim\limits_{|\alpha|\to 0} c(|\alpha|)d(|\alpha|) < \infty$, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, $\overline{R(A)} = Y$. Тогда единственное решение x^* уравнения (0.1) будет B-нормальным решением, а оператор $B(\alpha)$ — его стабилизирующим оператором.

Доказательство. Пусть сначала $B(\alpha)x^* \in R(A)$ при $\alpha \in S$. Тогда существует элемент $x_1(\alpha)$ такой, что $Ax_1(\alpha) = B(\alpha)x^*$ и получим тождество

$$(A+B(\alpha))^{-1}B(\alpha)x^* = (A+B(\alpha))^{-1}(Ax_1(\alpha)+B(\alpha)x_1(\alpha)-B(\alpha)x_1(\alpha)) =$$

$$= x_1(\alpha) - (A+B(\alpha))^{-1}B(\alpha)x_1(\alpha).$$

Т.к. $B(0) = 0$, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, то $\lim\limits_{S\ni\alpha\to 0} x_1(\alpha) = 0$. Отметим, что по условию $||(A+B(\alpha))^{-1}B(\alpha)|| \leq c(|\alpha|)d(|\alpha|)$, где $c(|\alpha|)d(|\alpha|)$ — непрерывная функция, для которой предел $\lim\limits_{|\alpha|\to 0} c(|\alpha|)d(|\alpha|)$ конечен. Поэтому α-последовательность $\{||(A+B(\alpha))^{-1}B(\alpha)x^*||\}$ бесконечно малая при $S \ni \alpha \to 0$. При этом последовательность операторов $\{(A+B(\alpha))^{-1}B(\alpha)\}$ поточечно сходится к нулевому оператору на линейном многообразии $L_0 = \{x \mid B(\alpha)x \in R(A)\}$.

Таким образом, доказано, что теорема справедлива в случае, когда $B(\alpha)x^* \in R(A)$. Т.к. по условию $\sup\limits_{\alpha\in S} c(|\alpha|)d(|\alpha|) < \infty$, то α-последовательность $\left\{||(A+B(\alpha))^{-1}B(\alpha)||\right\}$ норм линейных операторов является ограниченной. По доказанному последовательность линейных операторов $\{(A+B(\alpha))^{-1}B(\alpha)\}$ в пространстве X точечно сходится к нулевому оператору на линейном многообразии $L_0 = \{x \big| B(\alpha)x \in R(A)\}$. Но тогда на основании теоремы Банаха–Штейнгауза (см. [21], с. 123) имеем точечную сходимость этой последовательности операторов к нулевому оператору и на замыкании $\overline{L_0}$, т.е., когда $B(\alpha)x^* \in \overline{R(A)}$. Т.к. $\overline{R(A)} = Y$ и $B(\alpha) \in \mathcal{L}(X \to Y)$, то $B(\alpha)x^* \in Y$, теорема 2 доказана.

□

Замечание 2. Множество $L = \{x|B(\alpha)x \in \overline{R(A)}\}$ в условиях теоремы 2 определяет максимальный класс корректности.

Ограничения, наложенные в условиях теоремы 2, можно ослабить. Действительно, в теореме 2 используется предположение конечности предела

$$\lim_{S\ni\alpha\to 0} ||(A+B(\alpha))^{-1}||||B(\alpha)||.$$

Это ограничение не используется в теоремах 3 и 4.

Теорема 3. *Пусть* $B(\alpha) = \alpha B$, $||(A + \alpha B)^{-1}|| \le c(\alpha)$, *где* $c(\alpha) : (0, \alpha_0] \to R^+$ — *непрерывная функция. Пусть найдется натуральное* $n \ge 1$, *такое, что* $\lim\limits_{\alpha \to 0} c(\alpha)\alpha^i = \infty$, $i = \overline{0, n-1}$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} c(\alpha)\alpha^n < \infty$. *Пусть* x_0 *удовлетворяет уравнению (0.1), а в случае* $n \ge 2$ *пусть существуют элементы* $x_1, \cdots, x_{n-1}$, *удовлетворяющие последовательности уравнений*

$$Ax_i = Bx_{i-1}, \ i = 1, \cdots, n-1. \tag{2.2}$$

Тогда x_0 — *суть* B*-нормальное решение уравнения (0.1) тогда и только тогда, когда* $Bx_{n-1} \in \overline{R(A)}$.

Доказательство. В силу (2.2) имеем тождество

$$(A + \alpha B)^{-1}\alpha B x_0 = \alpha(A + \alpha B)^{-1}(Ax_1 + \alpha Bx_1 - \alpha Bx_1) =$$
$$= \alpha x_1 - \alpha^2 (A + \alpha B)^{-1} B x_1 = \cdots = \alpha x_1 - \alpha^2 x_2 + \cdots -$$
$$-(-1)^n \alpha^n (A + \alpha B)^{-1} B x_{n-1},$$

в котором очевидно при $\alpha \to 0$ справа первые $n-2$ слагаемых бесконечно малые. Используя теорему Банаха–Штейнгауза, убедимся, что и последовательность $\left\{\alpha^n ||(A + \alpha B)^{-1} B x_{n-1}||\right\}$ бесконечно малая. Действительно, если $Bx_{n-1} \in R(A)$, то существует x_n для которого $Ax_n = Bx_{n-1}$. Но тогда

$$\alpha^n (A + \alpha B)^{-1} B x_{n-1} = \alpha^n (A + \alpha B)^{-1}(A + \alpha B - \alpha B)x_n =$$
$$= \alpha^n x_n - \alpha^{n+1}(A + \alpha B)^1 B x_n,$$

где $\alpha^{n+1}||(A + \alpha B)^1 B x_n|| \le \alpha^{n+1} c(\alpha)||Bx_n||$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha^{n+1} c(\alpha) = 0$. Следовательно, последовательность $\{||\alpha^n (A + \alpha B)^1 B x_{n-1}||\}$ бесконечно малая, а последовательность линейных операторов $\{\alpha^n (A + \alpha B)^1 B\}$ точечно сходится к нулевому оператору на линейном многообразии $L = \{x | Bx \in R(A)\}$. При этом последовательность норм $\{||\alpha^n (A + \alpha B)^1 B||\}$ ограниченная. Так как $I = \{x \,|\, Bx \in \overline{R(A)}\}$, то остается завершить доказательство ссылкой на теорему Банаха – Штейнгауза. □

Если параметр α в операторе $B(\alpha)$ — векторный, то справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнены оценки (1.3)–(1.4) и найдется натуральное* $n \ge 1$, *такое, что* $\lim\limits_{\alpha \to 0} c(|\alpha|) d(|\alpha|)^i = \infty, i = 0, 1, \ldots, n-1$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} c(|\alpha|) d(|\alpha|)^n < \infty$. *Пусть в случае* $n \ge 2$ *разрешимы уравнения*

$$B(\alpha)Ax_i = B(\alpha)x_{i+1}, \ i = 1, \ldots, n-1,$$

где x_0 *– решение точного уравнения (0.1). Тогда* x_0 *–суть* B*-нормальное решение уравнения (0.1) тогда и только тогда, когда* $B(\alpha)x_{n-1} \in \overline{R(A)}$.

Доказательство теоремы 4 с небольшими изменениями повторяет доказательство теоремы 3.

В п. 3 метод возмущений проиллюстрируем на примере обоснования одного регуляризованного алгоритма операции дифференцирования.

3. О регуляризации операции дифференцирования

Пусть функция $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема на интервале I, а на интервале $(a, b) \subset I$ производная $y'(t)$ непрерывна. Тогда $y(t) - y(+a) - y'(+a)(t-a) = o(t-a)$ при $t \to +a$. Пусть задана ограниченная функция $\tilde{y} : [a, b] \to \mathbb{R}$ и числа c, d такие, что

$$\sup_{a<t<b} |\tilde{f}(t) - f(t)| = \mathcal{O}(\delta),$$

где $f(t) = y(t) - y(+a) - y'(+a)(t-a)$, $\tilde{f} = \tilde{y}(t) - c - d(t-a)$. В приложениях обычно известны значения $\tilde{y}(t_i)$ при $t_i = ih \in [a, b]$ такие, что $|y(t_i) - \tilde{y}(t_i)| = \mathcal{O}(\delta)$. Требуется по этой информации найти с ε-точностью значения $\tilde{y}_i'(t_i)$. С этой целью введем уравнения $(\alpha > 0)$:

$$\int_a^t x(s)\, ds = f(t), \tag{3.1}$$

$$\int_a^t \tilde{x}(s)\, ds = \tilde{f}(t), \tag{3.2}$$

$$\int_a^t x_\alpha(s)\, ds + \alpha x_\alpha(t) = f(t), \tag{3.3}$$

$$\int_a^t \tilde{x}_\alpha(s)\, ds + \alpha \tilde{x}_\alpha(t) = \tilde{f}(t). \tag{3.4}$$

Таким образом, в соответствии с использованными ранее обозначениями имеем $A := \int_a^t [\cdot]\, ds$, $R(A) = \left\{ f(t) \in \mathcal{C}^{(1)}_{[0,T]},\ f(0) = 0 \right\}$, $\overline{R(A)} = \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{[0,T]}$, $B(\alpha) := \alpha I$, $X = Y = \mathcal{C}_{[a,b]}$. Обратный оператор $(A + \alpha I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_{[a,b]} \to \mathcal{C}_{[a,b]})$ строится в явном виде $(A + \alpha I)^{-1} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \int_a^t e^{-\frac{t-s}{\alpha}} [\cdot]\, ds$. По построению $f(t) \in R(A)$ и точное уравнение (3.2) имеет единственное решение $x^*(t) = A^{-1} f = y'(t) - y'(+a)$. Заметим, что

$$||(A + \alpha I)^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{[a,b]} \to \mathcal{C}_{[a,b]})} \leq \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \max_{a \leq t \leq b} \int_a^t e^{-\frac{t-s}{\alpha}}\, ds \right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}(2 - e^{-\frac{a-b}{\alpha}}) < \frac{2}{\alpha}.$$

Поэтому условия согласования параметра регуляризации α с δ выполнятся, если, например, положить $\alpha = \sqrt{\delta}$. Т.к. $||B(\alpha)|| = \alpha$, $c(\alpha) = \frac{2}{\alpha}$, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, то на основании теоремы 2 непрерывная функция $x^*(t) = y'(t) - y'(+a)$ — суть B-нормальное решение тогда и только тогда, когда $x^*(t) \in \overline{R(A)}$. В рассматриваемом случае $R(A) = \{f(t) \in \mathcal{C}^{(1)}_{[a,b]},\ f(a) = 0\}$. Учитывая, что линейное множество функций $L_0 = \{f(t) \in \mathcal{C}^{(1)}_{[a,b]},\ f(+a) = 0\}$ плотно в множестве

$$L_1 = \{f(t) \in \mathcal{C}_{[a,b]},\ f(+a) = 0\}, x^*(+a) = 0,$$

получим требуемое включение $x^*(t) \in \overline{R(A)}$. Таким образом, на основании основной теоремы и теоремы 2 формула

$$\tilde{x}_\alpha(t) = \frac{\tilde{y}(t) - c - d(t-a)}{\alpha} - \\ - \frac{1}{\alpha^2} \int_a^t e^{-\frac{t-s}{\alpha}} \left(\tilde{y}(s) - c - d(s-a)\right) ds \quad (3.5)$$

определяет регуляризирующий алгоритм вычисления производной $y'(t)$. Точнее, для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ такое, что если

$$\sup_{a<t<b} |\tilde{y}(t) - c - d(t-a) - (y(t) - y(+a) - y'(+a)(t-a))| \le \delta,\ \delta \le \delta_0(\varepsilon),$$

то $\max\limits_{a \le t \le b} |\tilde{x}_\alpha(t) - (y'(t) - y'(+a))| \le \varepsilon$. Если положить $\alpha = \sqrt{\delta}$, то

$$\lim_{\delta \to 0} \max_{a \le t \le b} |\tilde{x}_\alpha(t) - (y'(t) - y'(+a))| = 0.$$

Таким образом, последовательность $\{\tilde{x}_\alpha\}$ при $\delta \to 0$ равномерно сходится к $y'(t) - y'(+a)$. Используя формулу (3.5) можно строить *равномерно регуляризирующий* по t алгоритм вычисления производной $y'(t)$ при $t \in [a, b]$.

В Таб. 1 и 2 приведены максимальные ошибки метода возмущений на основе (3.5) применительно к задаче устойчивого дифференцирования функции $y(t) = \sin t$ и функции $y(t) = t^2$, полученные при разном уровне шума δ при разном выборе параметра регуляризации α.

Приведенные расчеты продемонстрировали равномерность по t регуляризации предложенного метода.

Заключение

Изложенная в п.п. 1, 2 методика регуляризации, основанная на классическом методе возмущений, допускает ряд обобщений. Вместо РУ

δ	α	ε	α	ε
1e–002	1e–001	11970e–004	1e–002	73110e–005
1e–003	1e–001	10951e–005	1e–002	80100e–006
1e–004	1e–001	10010e–005	1e–002	17000e–006

Рис. 1. Таблица ошибок для $f(t) = \sin t$.

δ	α	ε	α	ε
1e–002	1e–001	29701e–005	1e–002	73610e–005
1e–003	1e–001	20900e–005	1e–002	91001e–006
1e–004	1e–001	20001e–005	1e–002	27000e–006

Рис. 2. Таблица ошибок для $y(t) = t^2$.

$(\tilde{A} + B(\alpha))\tilde{x} = \tilde{f}$ можно использовать более общее РУ (1.9), где L — определенный линейный оператор. В частности, в задаче численного дифференцирования, при условии $f(0) = 0$ можно в уравнении (1.9) положить $L\tilde{f} = \tilde{f}'(0)$, т. е. и вместо уравнения (3.4) решать уравнение $\int_0^t \tilde{x}_\alpha(s)\,ds + \alpha\tilde{x}_\alpha(t) = \tilde{f}(t) + \alpha\tilde{f}'(0)$. На практике, при решении РУ требуется обосновывать сходимость конкретных приближенных схем. Хорошо развитая в настоящее время общая теория абстрактных приближенных схем в банаховых пространствах (см. [1; 8], гл. 7 в [21] и приложения этой теории [23]) наметила единый подход к обоснованию сходимости разностных и проекционных методов решения регуляризованного операторного уравнения (1.2) при согласовании параметра регуляризации α. Тем не менее задача получения проверяемых достаточных условий сходимости приближенных схем в конкретных задачах требует учета специфики решаемой проблемы.

Список литературы

1. Говурин М. К. Лекции по методам вычислений / М. К. Говурин. – М. : Наука, 1971.
2. Гуковский С. А. Регуляризация построения неособого решения линейного уравнения первого рода с вырождением / С. А. Гуковский // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 1. – С. 71–74.
3. Иванов В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М. : Наука, 1978.
4. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Наука, 1962. – 125 с.
5. Латтес Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж. Д. Лионс. – М. : Мир, 1970.

6. Логинов Б. В. Вычисление собственных чисел и векторов ограниченных операторов методом ложных возмущений / Б. В. Логинов, Н. А. Сидоров // Мат. заметки. – 1976. – Т. 19, № 1. – С. 105–108.
7. Маслов В. П. Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризованного процесса / В. П. Маслов // Успехи мат. наук. – 1968. – Т. 141, вып. 23(3). – С. 183–184.
8. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1971.
9. Сидоров Н. А. Регуляризация линейных уравнений на основе теории возмущений / Н. А. Сидоров, В. А. Треногин // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 2038–2049.
10. Сидоров Н. А. Об одном подходе к проблеме регуляризации на основе возмущения линейных операторов / Н. А. Сидоров, В. А. Треногин // Мат. заметки. – 1976. – Т. 40, № 5. – С. 747–752.
11. Сидоров Н. А. Вычисление собственных чисел и векторов линейных операторов на основе теории возмущений / Н. А. Сидоров // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 8. – С. 1522–1525.
12. Сидоров Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н. А. Сидоров. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 1982. – 312 с.
13. Сидоров Н. А. О малых решениях нелинейных уравнений с векторным пареметром в секториальных окрестностях / Н. А. Сидоров, Р. Ю. Леонтьев, А. И. Дрегля // Мат. заметки. – 2012. – Т. 91, вып. 1. – С. 120–135.
14. Сидоров Н. А. Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами / Н. А. Сидоров // Мат. сб. – 1995. – Т. 186, № 6. – С. 129–144.
15. Сидоров Н. А. О решении интегрального уравнения Гаммерштейна в нерегулярном случае методом последовательных приближений / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 2. – С. 404–409.
16. Сидоров Н. А. О решении операторно-интегральных уравнений Вольтерры в нерегулярном случае методом последовательных приближений / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров, А. В. Красник // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 6. – С.874–882.
17. Сидоров Д. Н. Численное решение интегральных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами / Д. Н. Сидоров, А. Н. Тында, И. Р. Муфтахов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 107—115.
18. Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов / С. Б. Стечкин // Мат. заметки. – 1967. – Т. 1, № 2. – С. 137–148.
19. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974.
20. Тихонов А.Н. Некорректно поставленные задачи / А. Н. Тихонов, В. К. Иванов, М. М. Лаврентьев // Дифференциальные уравнения с частными производными. – М. : Наука, 1970. – С. 224–239.
21. Треногин В. А. Функциональный анализ // В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.
22. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике / А. Г. Ягола, В. Янфей, И. Э. Степанова, В. Н. Титоркин. – М. : Бином, 2014. – 216 с. – (Математическое моделирование).
23. Regularization by Discretization in Banach Spaces / U. Hämarik, B. Kaltenbacher, U. Kangro, E. Resmerita // ArXiv, Numerical Analysis, arXiv:1506.05425. – 2015. – P. 1–36.

24. Hào N. D. Heuristic regularization methods for numerical differentiation / N. D. Hào, L. H. Chuonga, D. Lesnic // Computers and Mathematics with Applications. – 2012. – Vol. 63. – P. 816–826.
25. Marchuk G. I. Perturbation theory and the statement of inverse problems / G. I. Marchuk // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 4. 5th Conf. on Optimization Tech., 1973. – P. 159–166.
26. Muftahov I. R. On perturbation method for the first kind equations: regularization and applications / I. R. Muftahov, D. N. Sidorov, N. A. Sidorov // Bul. of the South Ural State University. Ser. "Math. Model., Programming and Comp. Software". – 2015. Vol. 8, N 2. – P. 69–80.
27. Ramm A.G. On Stable Numerical Differentiation / A. G. Ramm, A. B. Smirnova // Mathematics of Computation. — 2001. — Vol. 70, N. 235. — P. 1131–1153.
28. Sidorov D. Integral Dynamical Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control / D. Sidorov; Ed. by L. O. Chua. —Singapore, London: World Scientific Publ., 2014. — Vol. 87 of *World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A.* — 243 p.
29. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. – Dortrecht : Kluwer Academic Publ., 2002. – 548 p.
30. Sizikov V. S. Further Development of the New Version of a Posteriori Choosing Regularization Parameter in Ill-Posed Problems. / V. S. Sizikov // Intl. J. of Artificial Intelligence. – 2015. – Vol. 13, N 1. – P. 184–199.
31. Trenogin V. A. Regularization of computation of branching solution of nonlinear equations / V. A. Trenogin, N. A. Sidorov // Lecture Notes in Mathematics. – 1977. – Vol. 594. – P. 491–506.
32. Numerical differentiation based algorithm for power measurement /J. K. Wu, J. Long, F. He, Q. L. He // 5th Intl IEEE Conf. in Power Electronics and Drive Systems, 2003. – Vol. 1. – P. 302–307.

Сидоров Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242210 (e-mail: sidorov@math.isu.runnet.ru)

Сидоров Денис Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130; Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1; Иркутский национальный исследовательский технический университет, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130, тел.: (3952)421342, (e-mail: dsidorov@isem.sei.irk.ru)

Муфтахов Ильдар Ринатович, аспирант, Иркутский национальный исследовательский технический университет, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 83, (e-mail: ildar_sm@mail.ru)

N. A. Sidorov, D. N. Sidorov, I. R. Muftahov

Perturbation Theory and the Banach – Steinhaus Theorem for Regularization of the Linear Equations of the First Kind

Abstract.
The regularizing equations with a vector parameter of regularization are constructed for the linear equations with closed operator acting in Banach spaces. Range of the operator can be an open, and the homogeneous equation may have a non-trivial solution. It is assumed that only approximations of operator and source are known. The conditions of solution uniqueness for the auxiliary regularized equation are derived. The convergence of regularized solution to B-normal solution of the exact equation is proved. The bounds estimates are derived for both deterministic and stochastic cases. The choice of the stabilizing operator and vector regularization parameter are provided. The method is applied to the problem of stable differentiation.

Keywords: Regularizing Equation, δ-approximation, Banach–Steinhaus Theorem, Perturbation Theory, Inverse Problems, Regularization, Expectation, Perturbation Theory, Stable Differentiation.

References

1. Govurin M.K. Lectures on Computational Methods. Moscow, Nauka Publ., 1971.
2. Gukovskii S. A. Regularization of the Construction of a Nonsingular Solution of a Linear Equations of the First Kind with Degeneracy. (in Russian)*Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1980, no 1, pp. 71-74.
3. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *The Theory of Linear Ill-posed Problems and their Applications* (in Russian). Moscow, Nauka, 1978.
4. Lavrentiev M.M. *Some Improperly Posed Problems in Mathematical Physics.* Springer, Berlin, 1967.
5. Lattès R., Lions J.-L. *The method of quasi-inversibility: application to partial differential equations.* NY, American Elsevier, 1969.
6. Loginov B.V., Sidorov N.A. Calculation of Eigenvalues and Eigenvectors of Bounded Operators by the False-Perturbation Method. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1976, vol. 19, issue 1, p. 62–64.
7. Maslov V.P. The Existence of a Solution of an Ill-Posed Problem is Equivalent to the Convergence of a Regularization Process. (in Russian) *Uspekhi Mat. Nauk*, 1968, vol. 23, no 3 (141), pp. 183-184.
8. Samarskii A.A. Introduction to Finite Difference Schemes. Moscow, Nauka Publ., 1971.
9. Sidorov N.A., Trenogin V.A. Linear Equations Regularization using the Perturbation Theory. *Diff. Eqs.*, 1980, vol. 16, no 11, pp. 2038-2049.
10. Sidorov N.A., Trenogin V.A. A Certain Approach the Problem of Regularization of the Basis of the Perturbation of Linear Operators. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1976, vol. 20, no 5, p. 976-979.
11. Sidorov N.A. Calculation of Eigenvalues and Eigenvectors of Linear Operators by the Theory of Perturbations (in Russian). *Differential Equations*, 1978, vol. 14, no 8, p. 1522-1525.
12. Sidorov N. A. *General Issues of Regularisation in the Problems of the Theory of Branching.* Irkutsk, Irkutsk State University Publ., 1982. 312 p.

13. Sidorov N.A., Leont'ev R.Yu., Dreglya A.I. On Small Solutions of Nonlinear Equations with Vector Parameter in Sectorial Neighborhood. *Mathematical Notes,* feb. 2012, vol. 91, no 1-2, pp. 90-104.
14. Sidorov N.A. Explicit and Implicit Parametrisation of the Construction of Branching Solutions by Iterative Methods. *Sbornik: Mathematics.* 1995, vol. 186, no. 2, pp. 297-310.
15. Sidorov N.A., Sidorov D.N. Solving the Hammerstein Integral Equation in Irregular Case by Successive Approximations. *Siberian Mathematical Journal*, March 2010, vol. 51, no 2, pp. 325-329.
16. Sidorov N. A., Sidorov D. N., Krasnik A.V. On Solution of the Volterra Operator-Integral Equations in Irregular Case using Successive Approximations. *Differential Equations,* 2010, vol. 46, no 6, pp.874-882.
17. Sidorov D.N., Tynda A. N., Muftahov I.R. Numerical Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind with Piecewise Continuous Kernel. *Bul. of the South Ural State University. Ser. "Math. Model., Programming and Comp. Software"*, 2014, vol. 7, no 3, pp. 107-115.
18. Stechkin S.B. The Best Approximation of Linear Operators. *Mat. Notes.* 1967, vol. 1, no 2, pp. 137-148.
19. Tikhonov A.N. *Solution of Ill-Posed Problems.* Winston. New York, 1977.
20. Tikhonov A.N., Ivanov V.K., Lavrent'ev. Ill-posed Problems. In the book *Partial Differential Eqs*, Moscow, Nauka, 1970, pp. 224-239.
21. Trenogin V.A. Functional analysis. Moscow, Nauka, 1980. 496 p.
22. Yagola A.G. *Inverse Problems and Methods of Their Solution. Applications to Geophysics.* (in Russian) Binom Publ. Ser. Mathematical Modelling, 2014. 216 p.
23. Hämarik U., Kaltenbacher B., Kangro U., Resmerita E. *Regularization by Discretization in Banach Spaces.* ArXiv, Numerical Analysis, arXiv:1506.05425, 2015, pp. 1-36.
24. Hào N. D., Chuonga L.N., Lesnic D. Heuristic regularization methods for numerical differentiation. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, vol. 63, pp. 816-826.
25. Marchuk G.I. Perturbation theory and the statement of inverse problems. *Lecture Notes in Computer Science.* Vol. 4: 5th Conf. on Optimization Tech., 1973, pp. 159-166.
26. Muftahov I.R., Sidorov D.N., Sidorov N.A. On perturbation method for the first kind equations: regularization and applications. *Bul. of the South Ural State University. Ser. "Math. Model., Programming and Comp. Software"*, 2015, vol. 8, no 2, pp. 69-80.
27. Ramm A. G., Smirnova A. B. On Stable Numerical Differentiation. *Mathematics of Computation,* 2001, vol. 70, no. 235, pp. 1131-1153.
28. Sidorov D. Integral Dynamical *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control*; Ed. by L. O. Chua, Singapore. London, World Scientific Publ., 2014, vol. 87 of *World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A*, 243 p.
29. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications.* Dortrecht, Kluwer Academic Publ., 2002. 548 p.
30. Sizikov V.S. Further Development of the New Version of a Posteriori Choosing Regularization Parameter in Ill-Posed Problems. *Intl. J. of Artificial Intelligence,* 2015, vol. 13, no 1, pp. 184–199.
31. Trenogin V.A., Sidorov N.A. Regularization of computation of branching solution of nonlinear equations. *Lecture Notes in Mathematics,* 1977, vol. 594, pp. 491-506.

32. Wu J. K., Long J., He F., He Q. L. Numerical differentiation based algorithm for power measurement. *5th Intl IEEE Conf. in Power Electronics and Drive Systems*, 2003, vol. 1, pp. 302-307.

Sidorov Nikolai Alexandrovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)242210 (e-mail: sidorov@math.isu.runnet.ru)

Sidorov Denis Nikolaevich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Senior Research Fellow, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Science (ESI SB RAS), 130, Lermontov st., Irkutsk, 664033; Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003; National Research Irkutsk State Technical University, 80, Lermontov st., Irkutsk, 664033 (e-mail: dsidorov@isem.sei.irk.ru)

Muftahov Ildar Rinatovich, Postgraduate, National Research Irkutsk State Technical University, 80, Lermontov st., Irkutsk, 664033 (e-mail: ildar_sm@mail.ru)