Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 4. С. 23—30

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК УДК 639.3

Информационные оценки в задаче слепой идентификации динамических систем *

В. В. Карелин
Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы сходимости и устойчивости байесовских оценок при идентификации стохастических систем управления. Основным аппаратом при установлении факта сходимости в данной работе является информационная мера рассогласования между оцениваемым распределением и оценкой. В качестве такой меры взято так называемое информационное число Кульбака – Лейблера. В работе установлена сходимость оценки переходной функции процесса к нестационарной переходной функции.

Ключевые слова: байесовские оценки; идентификация; информационное число.

1. Постановка задачи

Под слепой идентификацией будем понимать задачу идентификации, которая характеризуется той или иной степенью неопределенности относительно параметров входного и выходного сигналов. Решение задачи слепой идентификации динамической системы предполагает оценку неизвестных параметров системы только по наблюдаемому сигналу. Наблюдается последовательность случайных величин $x_t \in X$ условное распределение которых относительно x_{t-1}, принадлежит заданному семейству $\mathcal{P}$ распределений, зависящих от x_{t-1}. Важной статистической задачей является восстановление переходной функции процесса x_t, т. е. определение состоятельной последовательности оценок $P_t(dx_{t+1}|x_t)$, переходной вероятности $P(dx_{t+1}|x_t)$. Задача усложняется тем, что в реальных ситуациях $P(dx_{t+1}|x_t)$ зависит от неизвестного вектора параметров $\theta \in \Theta$, т.е. $P(dx_{t+1}|x_t, \theta)$. Цель статьи – изложение рекуррентной конструкции байесовского процесса оценивания и доказательство схо-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 12-01-00752.

димости ее к «истинному» распределению. Предполагаются следующие условия регулярности.

1. Для каждого $\theta \in \Theta$ и $x_t \in X$ мера $P(dx|x_t, \theta)$ доминируется неотрицательной мерой $m(dx)$ на X, т. е. существуют плотности $P(x|x_t, \theta)$ относительно $m(dx)$.

2. Θ – измеримое пространство и $P(x|x_t, \theta)$ – измеримая функция при каждом x на измеримом пространстве $X \times \Theta$. Обозначим

$$P(x_{t+1}|x_t, \nu) = \int\limits_{\Theta} P(x_{t+1}|x_t, \theta) d\nu(\theta),$$

где ν – конечная мера на Θ. Существуют и конечны интегралы

$$I(\theta, x_t) = \int\limits_{X} \ln \left[\frac{P(x_{t+1}|x_t, \theta)}{P(x_{t+1}|x_t, \nu)} \right] P(x_{t+1}|x_t, \theta) m(dy).$$

Процесс x_t определяемый переходной функцией $P(x_{t+1}|x_t, \theta)$ можно трактовать как частично наблюдаемый марковский процесс в фазовом пространстве $X \times \Theta$ с переходной функцией для $\theta : \theta_{t+1} = \theta_t$. Используя конструкцию, предложенную А. А. Юшкевичем [1] для сведения задачи с неполной информацией к задаче с полной информацией, приходим к рассмотрению процесса в фазовом пространстве $X \times H$, где H – пространство распределений на Θ. Переходная фикция этого процесса задается соотношениями

$$P(x_{t+1}|x_t, \nu_t) = \int\limits_{\Theta} P(x_{t+1}|x_t, \theta) \nu_t(\theta) n(d\theta), \tag{1.1}$$

$$\nu_{t+1}(\theta) = \nu_t(\theta) \frac{P(x_{t+1}|x_t, \theta)}{P(x_{t+1}|x_t, \nu_t)} \tag{1.2}$$

с начальными распределениями $P_1(x_1), \nu_1(\theta) = d\nu_1/dn$.

2. Информационное число Кульбака – Лейблера

Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – вероятностные меры на измеримом пространстве относительно неотрицательной меры $m(dx)$.

Определение 1. *Информационным число Кульбака – Лейблера называют величину [2].*

$$I(P_1; P_2) = \int\limits_{X} [\ln \frac{P_1(x)}{P_2(x)}] P_1(x) m(dx). \tag{2.1}$$

Если интеграл (2.1) существует, то

$$I(P_1(x);P_2(x)) \geq 0.$$

При этом $I(P_1(x);P_2(x)) = 0$, *тогда и только тогда, когда почти всюду* $P_1(x) = P_2(x)$.

Здесь имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$I(P_1(x);P_2(x)) \geq \frac{1}{8}\Bigg[\int\limits_X |P_1(x) - P_2(x)| m(dx)\Bigg]^2. \tag{2.2}$$

Доказательство. Разлагая функцию $-\ln(\alpha)$ в окрестности точки $\alpha = 1$ в ряд Тейлора, имеем

$$-\ln(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{(1-\alpha)^2}{2[1-\beta(1-\alpha)]^2}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Полагая $\alpha = P_2/P_1$, получим

$$I(P_1(x);P_2(x)) = \frac{1}{2}\int\limits_X \frac{[1 - P_2(x)/P_1(x)]^2}{[1-\beta(1-P_2(x)/P_1(x))]^2} P_1(x) m(dx) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_{P_1<P_2} \left[1 - \frac{P_2(x)}{P_1(x)}\right]^2 P_1(x) m(dx) + \frac{1}{2}\int\limits_{P_1>P_2} \varphi(y) m(dx),$$

где $\varphi(x) \geq 0$. Обозначим $\mu(A) = \int\limits_A P_1(x) m(dx) < 1$, а множество A определяется неравенством $P_1(x) > P_2(x)$.

Тогда

$$I(P_1(x);P_2(x)) \geq \frac{1}{2\mu(A)}\Bigg\{\int\limits_A |1 - \frac{P_2(x)}{P_1(x)}| P_1(x) m(dx)\Bigg\}^2 =$$

$$= \frac{1}{2\mu(A)}\Bigg\{\int\limits_A |P_2(x) - P_1(x)| m(dx)\Bigg\}^2.$$

Так как

$$\int\limits_A [P_1(x) - P_2(x)] m(dx) = \int\limits_{P_1<P_2} [P_1(y) - P_2(y)] m(dy) =$$

$$= \int\limits_{P_1<P_2} |P_1(x) - P_2(x)| m(dx) = \frac{1}{2}\int\limits_X |P_1(x) - P_2(x)| m(dx).$$

Окончательно имеем неравенство

$$I(P_1(x); P_2(x)) \geq \frac{1}{8\mu(A)} \left\{ \int\limits_X |P_2(x) - P_1(x)| m(dx) \right\}^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{8} \left[\int\limits_Y |P_2(x) - P_1(x)| m(dx) \right]^2.$$

□

Таким образом, метрику ρ можно оценить сверху величиной $(8I)^2$, т. е. для стремления $\rho \longrightarrow 0$ достаточно, чтобы $I \longrightarrow 0$. Для семейства нормальных распределений выполняется еще одно свойство.

Теорема 2. *Пусть $P_0(x)$ – произвольное распределение в R^n с центром в точке a и ковариационной матрицей V.. Рассмотрим семейство Q нормальных распределений в R^n, в котором $q_0(x)$ – нормальная плотность с тем же центром в a и ковариационной матрицей V. Тогда для любого $q(x) \in Q$ выполняется неравенство $I(P_0; q_0) \leq I(P_0; q)$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $q \equiv q_0$.*

Доказательство. Ввиду того что $\ln q_0/q-$ квадратичная форма,

$$\int\limits_X \ln(q_0/q) P_0 dx = \int\limits_X \ln(q_0/q) q_0 dx$$

Отсюда следует, что

$$I(P_0; q) = I(P_0; q_0) + I(q_0; q).$$

Так как

$$I(P_0; q) = \int\limits_X \ln(P_0/q) P_0 dx, \quad I(q_0; q) = \int\limits_X \ln(q_0/q) P_0 dx,$$

то

$$I(P_0; q) = \int\limits_X \ln(P_0/q) P_0 dx + \int\limits_X \ln(q_0/q) P_0 dx.$$

Поэтому $I(P_0; q_0) \leq I(P_0; q)$ причем равенство будет тогда и только тогда, когда $I(q_0; q) = 0$, т. е. $q \equiv q_0$. □

3. Асимптотические свойства последовательности ν_t

Определим переходную функцию процесса $\{x_t, \lambda_t\}$ соотношениями

$$P(x_{t+1}|x_t, \lambda_t) = \int_{\Theta} P_{\vartheta}(x_{t+1}|x_t)\lambda_t(\theta)n(d\theta), \tag{3.1}$$

$$\lambda_{t+1}(\theta) = \lambda_t(\theta)\frac{P_\theta(x_{t+1}|x_t)}{P(x_{t+1}|x_t, \lambda_t)}. \tag{3.2}$$

В качестве оценки функции $\lambda_t(\theta)$ выбираем распределение $\nu_t(\theta)$, определяемое рекуррентным соотношением (1.2) с произвольным начальным значением $\nu_1(\theta)$. Установим, что при $T \to \infty$ переходная функция $P(x_{t+1}|x_t, \nu_t)$ становится близкой к «истинной» переходной функции $P(x_{t+1}|x_t, \lambda_t)$.

Теорема 3. *[2, 3] Пусть $\{x_t, \lambda_t\}$ – марковский процесс, определяемый соотношениями (3.1) и (3.2). Тогда выполняется следующее неравенство:*

$$E(\sum_{t=1}^{\infty} I_t) \le \int_{\Theta} \ln\left[\frac{\lambda_1(\theta)}{\nu_1(\theta)}\right]\lambda_1(\theta)n(d\theta), \tag{3.3}$$

где

$$I_t = I(P(\cdot|x_t), \lambda_t); P(\cdot|x_t, \nu_t)).$$

Следствие 1. *С вероятностью 1 справедливы соотношения*

$$\sum_{t=1}^{\infty} I_t \le +\infty; \quad \lim_{t\to\infty} I_t = 0.$$

Распределение $\lambda_1(\theta)$ – произвольное. Например, в качестве $\lambda_1(\theta)$ может быть взято любое распределение, сосредоточенное в сколь угодно малой окрестности U_0 точки θ_0. Тогда и все распределения $\lambda_1(\theta)$ сосредоточены в этой окрестности.

Процесс $\{x_t, \lambda_t\}$ можно трактовать следующим образом: θ_t – случайная величина с распределением $\lambda_t(\theta)$; x_{t+1} – случайная величина с условным распределением $P_t(x_{t+1}|x_t, \theta_t)$, причем при всех $t \ge 1$ выполняется включение $\theta_t \in U_0$. Таким образом, процесс x_t можно трактовать как процесс, переходная функция которого определяется параметром, подверженным «малым» возмущениям. Ввиду включения $\theta_t \in U_0$ можно ожидать, что для $\theta_t \equiv \theta_0$ оценки $P_t(x_{t+1}|x_t, \nu_t)$, будут близки к «истинной» переходной функции $P_t(x_{t+1}|x_t, \theta_0)$,

Если множество Θ конечно, то окрестность точки θ_i совпадает с точкой θ_i (можно выбрать дискретную топологию). В этом случае интегральные соотношения принимают вид конечных или бесконечных сумм, а функции $\nu_t(\theta)$ превращаются в вероятностные последовательности $\nu_t(i), i = 1, 2, \ldots$. Тогда соотношение (3.3) принимает вид

$$E(\sum_{t=1}^{\infty} I_t) \leq -\ln \nu_1(i_0),$$

где i_0 – номер переходной функции, определяющий процесс x_t;

$$I_t = I(P_{i_0}; P_t), \quad P_t = \sum_{t=1}^{\infty} P_i(x_{t+1}|x_t)\nu_t(i).$$

4. Линейные разностные уравнения

Рассмотрим линейное разностное уравнение n-го порядка с нормальными возмущающими воздействиями.

$$x_{t+1} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \alpha_k x_{t-k} + f_{t+1},$$

здесь α_k – постоянные коэффициенты, f_t – последовательность независимых гауссовских величин с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Пусть x_t наблюдаются, коэффициенты α_k неизвестны. На процессе $\{x_t\}$ рассмотрим функционал

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} E x_t^2. \tag{4.1}$$

Введем следующие обозначения: $\theta' = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$. Тогда

$$x_{t+1} = \theta' z_t + f_{t+1}, \quad z_t' = (x_t, x_{t-1}, ..., x_{t-n}). \tag{4.2}$$

Переходная функция процесса, определяемая этим уравнением, имеет вид

$$P_\theta(x_{t+1}|z_t) = F(x_{t+1} - \theta' z_t),$$

где $F(y)$ – плотность распределения случайной величины f_t. Байесовскую конструкцию, связанную с семейством переходных функций $P_\theta(x_{t+1}|z_t)$, представим следующим образом:

$$P_\cdot(x_{t+1}|\nu_t, z_t) = \int_\Theta F(x_{t+1} - \theta' z_t)\nu_t(\theta) n(d\theta),$$

$$\nu_{t+1}(\theta) = \nu_t(\theta) \frac{F(x_{t+1} - \theta' z_t)}{P_\cdot(x_{t+1}|\nu_t, z_t)}. \tag{4.3}$$

Пусть $\nu_t(\theta)$ – плотность нормального случайного вектора со средним значением $\bar{\theta}_t$ и корреляционной матрицей S_t. Тогда $\nu_{t+1}(\theta)$ – плотность нормального вектора с корреляционной матрицей S_{t+1} и средним значением $\bar{\theta}_{t+1}$, причем справедливы рекуррентные соотношения, аналогичные соотношениям дискретного фильтра Калмана

$$S_{t+1}^{-1} = S_t^{-1} + \frac{1}{\sigma_{f^2}} z_t z_t',$$

$$\bar{\theta}_{t+1} = S_{t+1}[S_t^{-1}\bar{\theta}_t + \frac{1}{\sigma_{f^2}}(x_{t+1})z_t]. \tag{4.4}$$

Из этих соотношений вытекает, что в случае гауссовских величин f_t апостериорные плотности $\nu_t(\theta)$ распределения обладают интересным свойством – их корреляционные матрицы монотонно убывают: $S_{t+1} \le S_t$.

И в заключение рассмотрим следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $\nu_t(\theta)$ – последовательность апостериорных распределений, соответствующих нормальному априорному распределению $\nu_t(\theta)$, причем $nS_1 < I$. Пусть $\lambda(\theta)$ – плотность распределения, сосредоточенного в ограниченной области, удовлетворяющая неравенству $\lambda(\theta) < C\nu(\theta)$. Тогда выполняются неравенства*

$$E\{z_t^2\} \le const.$$

Доказательство. Ввиду неравенства $Ez_t^2 < CE_\lambda z^2$ для доказательства ограниченности последовательности Ez_t^2 достаточно показать ограниченность последовательности $E_\lambda z_t^2$. Последовательность матриц S_t монотонно убывает при всех $t \ge 1$, поэтому выполняется неравенство

$$I - nS_t \ge I - nS_0 \ge \epsilon_0 I,$$

если величина ϵ_0 достаточно мала. Следовательно,

$$EV(z_{t+1}) < \rho EV(z_t) + nd^2,$$

где $\rho < 1$, $V(z_t)$ – квадратичная форма и $Ef_t^2 = d^2$. Отсюда $EV(z_t) <$ const, что эквивалентно ограниченности Ez_t^2. □

Поясним смысл утверждений этой теоремы. Процесс $(x_t; \nu_t)$, обусловленный переходной функцией $P(x_{t+1}|z_t, \nu_t)$, можно трактовать как процесс, определяемый уравнением

$$x_{t+1} = \theta_t^T z_t + f_{t+1},$$

где θ_t – случайный вектор с распределением $\lambda_t(\theta)$. Так как носитель распределения $\lambda_t(\theta)$ сосредоточен в окрестности точки θ_0, то при $\forall t$ выполняется неравенство $|\theta_t - \theta_0| < \epsilon$. Таким образом, теорема утверждает, что байесовской процесс оценивания минимизирует величину (4.1) на решениях уравнения (4.2) с «малым» случайным возмущением вектора коэффициентов. Естественно, можно надеяться, что он будет минимизировать эту величину и для уравнения с невозмущенным вектором параметров $\theta_t \equiv \theta_0$.

Список литературы

1. Дынкин Е. Е. Управляемые марковские процессы и их приложения / Е. Е. Дынкин, А. А. Ющкенич. – М. : Наука,1975. – 338 с.
2. Karelin V. V. Adaptiveoptimal strategies in controlled Markov processes / V. V. Karelin // Advances in Optimization. Proceedings of 6-th French-German Colloquium of Optimization. FEG. - 1991. – P. 518–525.
3. Карелин В. В. Один подход к задаче оценки параметров динамической системы в условиях неопределенности / В. В. Карелин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. – 2012. – Вып. 4. – С. 31–36.

V. V. Karelin

Information estimates in the problem blind identification of dynamic systems.

Abstract. The convergence and stability problems of the Bayesian estimations are considered for identification of stochastic control systems. The main tools to prove the convergence is the information measure of the mismatch between the given distribution and the estimation. As a measure, the so-called information number of Kulbaka - Leiblera is taken. The convergence of the estimation of the transitive function to the process to the nonstationary transitive function is established.
Keywords: Bayesian estimation, identification, information number.

Карелин Владимир Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7-9
тел.: (812)4285048 (vlkarelin@mail.ru)

Karelin Vladimir, Saint Petersburg state university Universitetskaya nab. 7-9, Saint Petersburg, 199034, assoc. prof., Phone:(812)4285048 (vlkarelin@mail.ru)