Серия «Математика»
2017. Т. 21. С. 51—60

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.518.8
MSC 40A30
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.51

Суммирование универсальных рядов по многочленам Чебышёва

Л. К. Додунова

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

А. А. Агейкин

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

Аннотация. Универсальные функциональные ряды изучали многие авторы, начиная с 1906 г., в котором венгерский математик Фекете впервые рассмотрел универсальный степенной ряд в действительной области. Тригонометрические универсальные ряды построил Д. Е. Меньшов (1945), их исследовали также, например, J. J. Edge (1970), Н. Б. Погосян (1983). В комплексной области существование универсальных степенных рядов доказали А. И. Селезнёв (1951), C. K. Chui и M. N. Parnes (1971), V. Nestoridis (1996) и другие авторы. Разные авторы изучали также другие универсальные функциональные ряды.

Свойство универсальности функционального ряда заключается в приближении функции из определённого класса частичными суммами данного ряда. Это свойство представляет собой обобщение известной теоремы С. Н. Мергеляна (1952) о приближении аналитической функции многочленами на компактных множествах.

В настоящей работе показано существование универсального ряда по многочленам Чебышёва. W. Luh (1976) обобщил свойство универсальности степенного ряда на случай его матричных преобразований. В некотором смысле аналоги этого обобщения получены первым автором данной работы (1990, в соавторстве: 2012, 2013) для некоторых функциональных рядов. В настоящей работе указанное обобщение распространено на ряды по многочленам Чебышёва с помощью суммирования универсального ряда. А именно, построены специальные суммы, связанные с рядами по многочленам Чебышёва, обладающие свойством универсальности, то есть любая функция из определённого класса на компактных множествах, специальным образом взятых, равномерно приближается этими суммами. Построение их осуществляется методом матричного преобразования, который применялся ранее первым автором при построении специальных сумм для других рядов; но в отличие от них в исследуемых суммах в матрице преобразования столбцы берутся без пропусков.

Ключевые слова: универсальный ряд, многочлены Чебышёва, равномерная сходимость, суммирование.

1. Введение

Многочлены Чебышёва $T_n(z)$, определяемые по формуле $T_n(z) = cos(narccosz)$, где n = 0,1,2,... [14], широко используются в различных областях теоретической и прикладной математики. В теории приближений такое применение обосновано тем, что свойства многочленов Чебышёва «обеспечивают обычно более быструю сходимость разложений функций в ряд по многочленам Чебышёва по сравнению с их разложениями в степенной ряд или в ряд по другим специальным многочленам или функциям» [7, с. 5-6]. В данной работе приближение функции осуществляется частичной суммой универсального ряда по многочленам Чебышёва и его обобщением. Универсальные функциональные ряды изучались, например, в работах [1; 3-6; 8-10; 12; 13; 15-17; 19].

В работе [5] рассматривались многочлены Чебышёва, номера которых образуют последовательность единичной плотности, а в настоящей работе эта плотность берётся меньше единицы, т. е. здесь другой закон пропусков многочленов. Кроме того, с помощью матрицы преобразования получено обобщение, которое также отличается от результата [5] ещё и тем, что столбцы этой матрицы берутся без пропусков, т. е. здесь другая структура сумм, приближающих функцию.

Введём необходимые в дальнейшем обозначения и определения.

Пусть F — компактное множество комплексной плоскости z, дополнением которого является область, содержащая бесконечно удалённую точку.

Обозначим через $C_A(F)$ класс функций, непрерывных на F и аналитических в каждой внутренней точке этого множества.

Определение 1. *Ряд по многочленам Чебышёва*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(z) \tag{1.1}$$

называется универсальным, если для каждого множества F, указанного выше, и любой функции $f(z) \in C_A(F)$ найдется подпоследовательность $\{S_{n_k}\}_{k=1,2,...}$ частичных сумм ряда (1.1), равномерно сходящаяся на F к $f(z)$.

Уточним область существования и вид универсального ряда по многочленам Чебышёва. Для этого введём необходимые определения и приведём следующие рассуждения. Пусть функция $w = \phi(z)$ отображает внешность отрезка $[-1, +1]$ комплексной плоскости z на внешность некоторой окружности Γ радиуса $\rho < 1$ с центром в точке $w = 0$ комплексной плоскости w.

Определение 2. *Криволинейным углом раствора φ назовём область, описываемую жордановой дугой, соединяющей точку окружности Γ с точкой $w = 0$, при повороте плоскости w на угол φ вокруг начала $w = 0$ [11].*

Через D обозначим область, не содержащую отрезка действительной оси $[-1, +1]$, которая при отображении $w = \phi(z)$ переходит в криволинейный угол раствора $2\pi\tau$, где $\tau \in (0, 1]$.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1,2,\ldots}$ - подпоследовательность натуральных чисел, имеющая плотность

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \tau, \quad \tau < 1. \tag{1.2}$$

В работе [11] при выполнении условия (1.2) показано существование универсального ряда по многочленам Фабера. Как известно, многочлены Чебышёва являются частным случаем многочленов Фабера, когда континуум, по которому они строятся, есть отрезок действительной оси $[-1, +1]$. Таким образом, из результата работы [11] следует

Утверждение 1. *Пусть выполнено условие* (1.2) *и пусть множество F, указанное выше, содержится в области D. Тогда существует универсальный ряд по многочленам Чебышёва вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n T_{\lambda_n}(z).$$

В работе [18] представлено обобщение универсального степенного ряда. В некотором смысле аналоги этого обобщения получены в работах [2; 4; 5]. В данной работе рассмотрено суммирование универсального ряда по многочленам Чебышёва, представляющее собой его обобщение и отличающееся от аналогов [4; 5], прежде всего, тем, что столбцы матрицы преобразования, которая участвует в суммировании, берутся без пропусков. Для данных аналогов матрица такого вида рассматривается здесь впервые, то есть суммы, которыми приближается функция из определённого класса, отличаются от сумм, построенных в указанных выше аналогах, той или иной структурой.

2. Теорема о суммируемости универсального ряда по многочленам Чебышёва

Теорема. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1,2,\ldots}$ — подпоследовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию* (1.2).

Пусть $A=\{\alpha_{n\nu}\}$ *— нижняя треугольная бесконечная матрица, элементы которой удовлетворяют условиям:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{n\nu}=1, \quad \lim_{n\to\infty}\alpha_{n\nu}=0 \quad \forall\nu. \tag{2.1}$$

Тогда существует ряд по многочленам Чебышева

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nT_{\lambda_n}(z),$$

обладающий следующим свойством: для каждого компактного множества F*, содержащегося в области* D*, и любой функции* $f\in C_A(F)$*, найдется подпоследовательность натуральных чисел* $\{\lambda_{m_k}\}_{k=1,2,...}$*, зависящая от* F *и* f*, такая, что*

$$S_{\lambda_{m_k}}(z)=\sum_{i=1}^{\lambda_{m_k}}\alpha_{\lambda_{m_k}i}Q_{\lambda_{n_i}}(z), \quad k=1,2,..., \tag{2.2}$$

где

$$Q_{\lambda_{n_i}}(z)=\sum_{n=1}^{n_i}a_nT_{\lambda_n}(z),$$

равномерно сходится к $f(z)$ *на* F.

Замечание. В отличие от аналога этой теоремы, полученного в работе [5], здесь столбцы матрицы A берутся без пропусков, а многочлены Чебышёва отличаются плотностью (1.2). Эти отличия отражаются в структуре, а следовательно, и в построении сумм (2.2).

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая

Лемма. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $B=\{\beta_{k\nu}\}$ *— нижняя треугольная бесконечная матрица, элементы которой удовлетворяют условиям* (2.1)*;*

2) $\{\lambda_k\}_{k=1,2,...}$ *— последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая уловию* (1.1)*,* $\{\lambda_{k_m}\}_{m=1,2,...}$*,* $\{\lambda_{\widetilde{k}_m}\}_{m=1,2,...}$ *— ее подпоследовательности;*

3) дан универсальный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_kT_{\lambda_k}(z). \tag{2.3}$$

Тогда функция $f\in C_A(F)$ *может быть равномерно аппроксимирована на указанном в теореме* F *многочленами вида*

$$\sum_{i=m}^{\lambda_{k_{m+l}}}\beta_{\lambda_{k_{m+l}}i}S_{\lambda_{\widetilde{k}_i}}(z), \tag{2.4}$$

где

$$S_{\lambda_{\widetilde{k}_i}}(z) = \sum_{k=1}^{\widetilde{k}_i} b_k T_{\lambda_k}(z).$$

Доказательство. По определению универсального ряда вида (2.3) для каждого указанного выше множества F и любой функции $f(z)/(\beta_{\lambda_{k_{m+l}}i}(\lambda_{k_{m+l}} - m + 1)) \in C_A(F)$ будем иметь

$$|S_{\lambda_{\widetilde{k}_i}}(z) - f(z)/(\beta_{\lambda_{k_{m+l}}i}(\lambda_{k_{m+l}} - m + 1))| < \varepsilon/(|\beta_{\lambda_{k_{m+l}}i}|(\lambda_{k_{m+l}} - m + 1)) \tag{2.5}$$

при $i = m, m+1, ..., \lambda_{k_{m+l}};\ m > N$.

Используя (2.5), получим

$$|\sum_{i=m}^{\lambda_{k_{m+l}}} \beta_{\lambda_{k_{m+l}}i} S_{\lambda_{\widetilde{k}_i}}(z) - f(z)| \le$$

$$\sum_{i=m}^{\lambda_{k_{m+l}}} |\beta_{\lambda_{k_{m+l}}i}||S_{\lambda_{\widetilde{k}_i}}(z) - f(z)/(\beta_{\lambda_{k_{m+l}}i}(\lambda_{k_{m+l}} - m + 1)| < \varepsilon.$$

□

Доказательство. Доказательство теоремы проведем методом работы [2].

Совокупность многочленов вида (2.4) расположим в последовательность

$$P_1(z), P_2(z), ..., P_k(z), ... \tag{2.6}$$

В силу доказанной выше леммы можно равномерно аппроксимировать многочленами (2.6) любую функцию $f(z) \in C_A(F)$, где F - произвольное множество, содержащееся в области D.

Расположим всевозможные компактные множества такого вида в последовательность

$$F_1, F_2, ..., F_n, ... \tag{2.7}$$

Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1,2,...}$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Чтобы построить сумму вида (2.2), равномерно сходящуюся на F из совокупности (2.7) к функции $f(z) \in C_A(F)$, достаточно построить суммы

$$S_{\lambda_{m_k^{(l)}}}(z) = \alpha_{\lambda_{m_k^{(l)}}1} Q_{\lambda_{n_1}}(z) + ... + \alpha_{\lambda_{m_k^{(l)}}\lambda_{m_k^{(l)}}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_k^{(l)}}}}}(z), \tag{2.8}$$

где $k = 1, 2, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющие условиям

$$|P_l(z) - S_{\lambda_{m_k^{(l)}}}(z)| < \varepsilon_k \quad \text{при} \quad z \in F_k. \tag{2.9}$$

Действительно, предполагая построенными суммы (2.8), удовлетворяющие условию (2.9), и воспользовавшись леммой, доказанной выше, можно для любого $\varepsilon > 0$, компактного множества F из совокупности (2.7) и функции $f(z) \in C_A(F)$ выбрать в последовательности (2.6) многочлен $P_l(z)$ такой, что

$$|f(z) - P_l(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad z \in F.$$

После этого, взяв k настолько большим, чтобы $F \subset F_k$ и $\varepsilon_k < \varepsilon/2$, будем иметь при любом $z \in F$

$$|f(z) - S_{\lambda_{m_k^{(1)}}}(z)| < |f(z) - P_l(z)| + |P_l(z) - S_{\lambda_{m_k^{(1)}}}(z)| < \varepsilon_k.$$

Построение сумм (2.8), удовлетворяющих условию (2.9), можно выполнить следующим образом.

Выберем из последовательности (2.6) многочлен

$$S_{\lambda_{m_1^{(1)}}}(z) = \alpha_{\lambda_{m_1^{(1)}}1} Q_{\lambda_{n_1}}(z) + \alpha_{\lambda_{m_1^{(1)}}2} Q_{\lambda_{n_2}}(z) + ... + \alpha_{\lambda_{m_1^{(1)}}\lambda_{m_1^{(1)}}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_1^{(1)}}}}}(z)$$

такой, что $|P_1(z) - S_{\lambda_{m_1^{(1)}}}(z)| < \varepsilon_1$ при $z \in F_1$.

В силу установленной выше леммы, с учетом условий (2.1), в последовательности (2.6) найдутся многочлены

$$\alpha_{\lambda_{m_2^{(1)}}\lambda_{\widetilde{m}_1^{(1)}}+1} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{\widetilde{m}_1^{(1)}}+1}}} + ... + \alpha_{\lambda_{m_2^{(1)}}\lambda_{m_2^{(1)}}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_2^{(1)}}}}},$$

$$\alpha_{\lambda_{m_2^{(2)}}\lambda_{\widetilde{m}_2^{(1)}}+1} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{\widetilde{m}_2^{(1)}}+1}}} + ... + \alpha_{\lambda_{m_2^{(2)}}\lambda_{m_2^{(2)}}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_2^{(2)}}}}},$$

$$m_1^{(1)} < \widetilde{m}_1^{(1)} < m_2^{(1)} < \widetilde{m}_2^{(1)} < m_2^{(2)}$$

такие, что при $z \in F_2$

$$|P_1(z) - S_{\lambda_{m_2^{(1)}}}(z)| < \varepsilon_2,$$

$$|P_2(z) - S_{\lambda_{m_2^{(2)}}}(z)| < \varepsilon_2,$$

где

$$S_{\lambda_{m_2^{(1)}}}(z) = \alpha_{\lambda_{m_2^{(1)}}1} Q_{\lambda_{n_1}}(z) + ... + \alpha_{\lambda_{m_2^{(1)}}\lambda_{m_1^{(1)}}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_1^{(1)}}}}}(z) + ...$$

$$... + \alpha_{\lambda_{m_2^{(1)}}\lambda_{m_2^{(1)}}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_2^{(1)}}}}}(z),$$

$$S_{\lambda_{m_2^{(2)}}}(z) = \alpha_{\lambda_{m_2^{(2)}}1} Q_{\lambda_{n_1}}(z) + ... + \alpha_{\lambda_{m_2^{(2)}}\lambda_{m_1^{(1)}}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_1^{(1)}}}}}(z) + ...$$

$$... + \alpha_{\lambda_{m_2^{(2)}} \lambda_{m_2^{(1)}}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_2^{(1)}}}}}(z) + ... + \alpha_{\lambda_{m_2^{(2)}} \lambda_{m_2^{(2)}}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_2^{(2)}}}}}(z).$$

Воспользовавшись принципом математической индукции, построим для любого k, $k = 1, 2, \ldots$, суммы

$$S_{\lambda_{m_1^{(1)}}}(z), S_{\lambda_{m_2^{(1)}}}(z), S_{\lambda_{m_2^{(2)}}}(z), ..., S_{\lambda_{m_k^{(1)}}}(z), ..., S_{\lambda_{m_k^{(k)}}}(z),$$

удовлетворяющие условию (2.9), выберем из последовательности (2.6) многочлены

$$\alpha_{\lambda_{m_{k+1}^{(1)}} \lambda_{\widetilde{m}_k^{(k)}+1}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{\widetilde{m}_k^{(k)}}+1}}}(z) + ... + \alpha_{\lambda_{m_{k+1}^{(1)}} \lambda_{m_{k+1}^{(1)}}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_{k+1}^{(1)}}}}}(z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{\lambda_{m_{k+1}^{(k+1)}} \lambda_{\widetilde{m}_k^{(k)}+1}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{\widetilde{m}_{k+1}^{(k)}}+1}}}(z) + ... + \alpha_{\lambda_{m_{k+1}^{(k+1)}} \lambda_{m_{k+1}^{(k+1)}}} Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_{k+1}^{(k+1)}}}}}(z)$$

такие, что, полагая в (2.8) $k+1$ вместо k, получим

$$|P_l(z) - S_{\lambda_{m_{k+1}^{(l)}}}(z)| < \varepsilon_{k+1},$$

$(l = 1, 2, ..., k+1)$ при $z \in F_{k+1}$.

Отсюда в силу математической индукции следует существование сумм (2.8), удовлетворяющих (2.9), а следовательно, и существование сумм (2.2) с нужным аппроксимационным свойством. □

Список литературы

1. Гостева Н. В. Об одном обобщении свойства универсальности степенных рядов с пропусками / Н. В. Гостева, Л. К. Додунова // Изв. вузов. Математика. – 2012 – № 3. – С. 3–8.
2. Додунова Л. К. Об одном обобщении свойства универсальности рядов по многочленам Фабера / Л. К. Додунова // Изв. вузов. Математика. – 1990 – № 12. – С. 31–34.
3. Додунова Л. К. О сверхсходимости универсальных рядов / Л. К. Додунова // Изв. вузов. Математика. – 1988 – № 2. – С. 19–22.
4. Додунова Л. К. Приближение функций универсальными суммами рядов по подсистемам многочленов Эрмита / Л. К. Додунова, О. В. Тютюлина // Изв. вузов. Математика. – 2013 – № 9. – С. 16–20.
5. Додунова Л. К. Обобщение универсального ряда по многочленам Чебышёва / Л. К. Додунова, Д. Д. Охатрина // Чебышев. сб. – 2017 – Т. 18, вып. 1. – С. 65–72.
6. Меньшов Д. Е. Об универсальных тригонометрических рядах / Д. Е. Меньшов // Докл. АН СССР. – 1945 – Т. 49, № 2. – С. 79–82.
7. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва / С. Пашковский ; пер. с польск. С. Н. Киро, под ред. В. И. Лебедева. – М. : Наука, 1983.

8. Погосян Н. Б. Об универсальных рядах Фурье / Н. Б. Погосян // Успехи мат. наук. – 1983 – Т. 38, № 1. – С. 185–186. https://doi.org/10.1070/RM1983v038n01ABEH003410
9. Селезнёв А. И. Об универсальных степенных рядах / А. И. Селезнёв // Мат. сб. – 1951 – Т. 28, № 2. – С. 453–460.
10. Селезнёв А. И. О некоторых классах универсальных рядов / А. И. Селезнёв, Л. К. Додунова // Изв. вузов. Математика. – 1977 – № 12. – С. 92–98.
11. Селезнёв А. И. К двум теоремам А. Ф. Леонтьева о полноте подсистем полиномов Фабера и Якоби / А. И. Селезнёв, Л. К. Додунова // Изв. вузов. Математика. – 1982 – № 4. – С. 51–55.
12. Селезнёв А. И. О полноте систем функций и универсальных рядах / А. И. Селезнёв, И. В. Мотова, В. А. Волохин // Изв. вузов. Математика. – 1977 – № 11. – С. 84–90.
13. Чащина Н. С. К теории универсального ряда Дирихле / Н. С. Чащина // Мат. сб. – 1963 – № 4. – С. 165–167.
14. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышёва. – М. : Изд-во АН СССР, 1947. – Т. 2.
15. Chui C. K. Approximation by overconvergence of a power series / C. K. Chui, M. N. Parnes // J. Math. Anal. Appl. – 1971. – Vol. 36, N 3. – P. 693–696. https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90049-7
16. Edge J. J. Universal trigonometric series / J. J. Edge // J. Math. Anal. Appl. – 1970. – N 29. – P. 507–511. https://doi.org/10.1016/0022-247X(70)90064-8.
17. Katsoprinakis E. Universal Faber series / E. Katsoprinakis, V. Nestoridis, I. Papadoperakis // Analysis (Munich). – 2001. – N 21. – P. 339–363.
18. Luh W. Uber den Sats von Mergelyan / W. Luh // J. Approxim. Theory. – 1976. – Vol l6, N 2. – P. 194–198. https://doi.org/10.1016/0021-9045(76)90048-4.
19. Nestoridis V. Universal Taylor series / V. Nestoridis // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1996. – N 46. – P. 1293–1306.

Додунова Людмила Кузьминична, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, 603022, Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23 тел.: +7(831)4623320 (e-mail: dodunova@inbox.ru)

Агейкин Артем Александрович, магистрант 1-го курса, Институт информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, 603022, Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23 тел.: +7(831)4623320
(e-mail: ageickin@yandex.ru)

L. K. Dodunova, A. A. Ageikin

Summation of the Universal Series on the Chebyshev Polynomials

Abstract. The Universal functional series have been studied by many authors since 1906, the year when the Hungarian mathematician, Michael Fekete first considered the universal power series in the real domain. Trigonometric universal series were built by D. E. Menshov (1945), they were also researched, for example, by J. Edge (1970), and N.

Pogosyan (1983). In the complex domain the existence of the universal power series was proved by A. I. Seleznyov, C.K. Chui, M.N. Parnes (1971), V. Nestoridis (1996), and by other authors. Various authors have also studied other universal functional series.

The property of universality of a functional series is the approximation of the function of a certain class by partial sums of this series. This property is a generalization of the well-known S.N. Mergelyan theorem (1952) on the approximation of analytic functions by polynomials on compact sets.

The present work demonstrates the existence of the universal series on the Chebyshev polynomials. W. Luh (1976) summarized the universal property of a power series in case of its matrix transformations. In some sense the analogues of this generalization were obtained by the first author of this work (1990, coauthored: 2012, 2013) for certain functional series. In this paper the aforementioned generalization is extended to series on the Chebyshev polynomials by summation of the universal series. Namely, we have constructed special sums related to the series on the Chebyshev polynomials possessing the property of universality, that is, any function of a certain class on compact sets, taken in a specific way, uniformly approach by these sums. The construction of the sums is carried out by the method of matrix transformation that was previously used by the first author in the construction of specific sums for other series; but unlike them, in researched sams in the matrix transformation the columns are taken without gaps.

Keywords: universal series, Chebyshev polynomials, uniform approximation, summation.

References

1. Gosteva N.V., Dodunova L.K. A generalization of the universal property of power series with gaps (in Russian). *Izvestiya VUZ. Matematika*, 2012, no 3, pp. 3-8.
2. Dodunova L.K. A generalization of the universality property of Faber polynomial series (in Russian). *Izvestiya VUZ. Matematika*, 1990, no 12, pp. 31-34.
3. Dodunova L.K. On the overconvergence of universal series (in Russian). *Izvestiya VUZ. Matematika*, 1988, no 2, pp. 19-22.
4. Dodunova L.K., Tyutyulina O.V. Approximation of functions by universal sums of Hermite polynomial the subsystems series (in Russian). *Izvestiya VUZ. Matematika*, 2013, no 9, pp. 16-20.
5. Dodunova L.K., Okhatrina D.D. The generalization of the universal series in Chebyshev polynomials (in Russian). *Chebyshev sbornic*, 2017, vol. 18, issue1, pp. 65-72.
6. Men′shov D.E. On universal trigonometric series (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1945, vol. 49, no 2, pp. 79-82.
7. Paszkovski C. Computational applications Chebyshev polynomials and series. Trans. from Polish by S. N. Kiro, V. I., Lebedev edited (in Russian). Moscow, Nauka, 1983.
8. Pogosyan N.B. On universal Fourier series (in Russian). *UMN*, 1983, vol. 38, no 1, pp. 185-186. https://doi.org/10.1070/RM1983v038n01ABEH003410
9. Seleznev A.I. On universal power series (in Russian). *Mat. Sb.*, 1951, vol. 28, no 2, pp. 453-460.
10. Seleznev A.I., Dodunova L.K. Some classes of universal series (in Russian). *Izvestiya VUZ. Matematika*, 1977, no 12, pp. 92-98.
11. Seleznev A.I., Dodunova L.K. On two theorems of A. F. Leontev on the completeness of subsystems of Faber and Jacobi polynomials (in Russian). *Izvestiya VUZ. Matematika*, 1982, no 4, pp. 51-55.

12. Seleznev A.I., Motova I.V., Volokhin V.A. The completeness of systems of functions and universal series (in Russian). *Izvestiya VUZ. Matematika*, 1977, no 11, pp. 84-90.
13. Chashchina N.S. On the theory of a universal dirichlet series (in Russian). *Izvestiya VUZ. Matematika*, 1963, no 4, pp. 165-167.
14. Chebyshev P.L. The complete collection of the works of Chebyshev (in Russian). Moscow, Akad. Nauk SSSR, 1947, vol. 2.
15. Chui C. K. Parnes M. N. Approximation by overconvergence of a power series. *J. Math. Anal. Appl.*, 1971, vol. 36, no 3, pp. 693-696. https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90049-7
16. Edge J. J. Universal trigonometric series. *J. Math. Anal. Appl.*, 1970, no 29, pp. 507-511. https://doi.org/10.1016/0022-247X(70)90064-8
17. Katsoprinakis E. Nestoridis, V. Papadoperakis I. Universal Faber series. *Analysis (Munich)*, 2001, no 21, pp. 339-363.
18. Luh W. Uber den Sats von Mergelyan. *J. Approxim. Theory*, 1976, vol. 16, no 2, pp. 194-198. https://doi.org/10.1016/0021-9045(76)90048-4
19. Nestoridis V. Universal Taylor series. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1996, no 46, pp. 1293-1306.

Dodunova Lyudmila Kuz'minichna, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 23, Gagarina prospekt, Nizhni Novgorod, 603022 tel.: +7(831)4623320 (e-mail: `dodunova@inbox.ru`)

Ageikin Artem Aleksandrovich, 1 year Undergraduate, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 23, Gagarina prospekt, Nizhni Novgorod, 603022 tel.: +7(831)4623320 (e-mail: `ageickin@yandex.ru`)