Серия «Математика»
2018. Т. 23. С. 3—19

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 539.3: 532.542
MSC 74F10
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.23.3

О динамической устойчивости нелинейной аэроупругой системы

П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов
Ульяновский государственный технический университет

Аннотация. Рассматривается нелинейная математическая модель устройства, относящегося к вибрационной технике, которое предназначено для интенсификации технологических процессов, например, процесса размешивания. Действие подобных устройств основано на колебаниях упругих элементов при обтекании их потоком размешиваемой среды. Исследуется динамическая устойчивость n упругих элементов, расположенных внутри проточного канала, при протекании в нем дозвукового потока газожидкостной среды (в модели идеальной сжимаемой среды). Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Модель описывается связанной нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных для неизвестных функций – потенциала скорости газожидкостной среды и деформаций упругих элементов. На основе построения функционала получены достаточные условия динамической устойчивости, налагающие ограничения на скорость потока газожидкостной среды, изгибные жесткости упругих элементов и другие параметры механической системы.

Ключевые слова: математическое моделирование, аэрогидроупругость, динамическая устойчивость, система дифференциальных уравнений в частных производных, функционал.

1. Введение

При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств, установок различного назначения, взаимодействующих с потоком газа или жидкости, важной проблемой является обеспечение надежности их функционирования и увеличение сроков службы. Подобные проблемы присущи многим отраслям техники. В частности, такого рода задачи возникают в авиаракетостроении, приборостроении, при проектировании антенных установок, высоких наземных сооружений и т. д. Существенное значение при расчете конструкций, взаимодействующих с потоком газа, имеет исследование устойчивости деформируемых элементов, так как воздействие потока может приводить к ее потере. В качестве примеров потери динамической устойчивости можно указать: флаттер крыла самолета; панельный флаттер пластин и оболочек, обтекаемых потоком, например флаттер панели обшивки самолета или ракеты; срывной флаттер лопаток турбин и винтов; колебания проводов, дымовых труб, висячих мостов и т. д.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, являются устройства, используемые для интенсификации технологических процессов. Например, устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, в частности, установок для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например, [8]).

Основной частью широкого класса подобных устройств является проточный канал, на стенках которого (или внутри него) расположены упругие элементы. Работа таких устройств основана на вибрации упругих элементов при протекании внутри каналов жидкости. Таким образом, при проектировании конструкций и устройств, находящихся во взаимодействии с потоком газа, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

Устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком газа, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в последние десятилетия. Среди последних исследований по динамике и устойчивости деформируемых тел, обтекаемых потоком жидкости или газа, следует отметить работы [1; 11; 14–17; 19–22] и мн. др. Среди работ авторов данной статьи по исследованию динамики и устойчивости упругих тел, в том числе взаимодействующих с потоком жидкости или газа, отметим монографии и статьи [2–7; 9; 12; 13; 18].

Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Проблема может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость – тело» (основными параметрами являются скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, сжимающие или растягивающие усилия, силы трения), малым деформациям тел в начальный момент времени $t = 0$ (т. е. малым начальным отклонениям от положения равновесия) будут соответствовать малые деформации и в любой момент времени $t > 0$.

2. Математическая модель

Рассмотрим плоское течение в вибрационном устройстве, моделируемом прямолинейным каналом $G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < H\}$, в котором расположены упругие элементы. Скорость невозмущенного однородного потока на входе в канал равна V и направлена вдоль оси Ox. Упругими элементами являются пластины $J_i = \left\{(x, y) \in R^2 : y = y_0 \in (0, H), x \in [b_i, c_i]\right\}, \ i = \overline{1, n}$ (рис. 1).

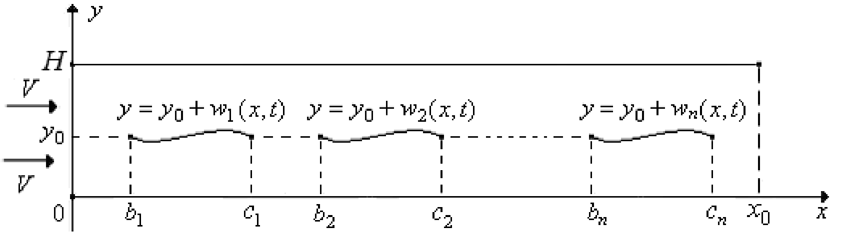

Рис. 1. Канал, внутри которого расположены деформируемые элементы

Введем обозначения: $u_i(x, t)$, $w_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$ – функции, определяющие продольные и поперечные составляющие деформации элементов в направлении осей Ox и Oy соответственно, где $t \geq 0$ – время. Функции $w_i(x, t) \in C^{4,2}\left\{[b_i, c_i] \times R^+\right\}$, т. е. принадлежат множеству четырежды непрерывно-дифференцируемых функций по переменной x на отрезках $[b_i, c_i]$ и дважды непрерывно-дифференцируемых по переменной t при $t \geq 0$ и принимают действительные значения. Функции $u_i(x, t) \in C^{2,2}\left\{[b_i, c_i] \times R^+\right\}$, т. е. принадлежат множеству дважды непрерывно-дифференцируемых функций по переменной x на отрезках $[b_i, c_i]$ и дважды непрерывно-дифференцируемых по переменной t при $t \geq 0$ и принимают действительные значения.

Введем также обозначение: $\varphi(x, y, t)$ — функция, определяющая потенциал скорости возмущенного потока газожидкостной среды. Функция $\varphi(x, y, t) \in C^{2,2}\{G \times R^+\}$, т.е. принадлежит множеству дважды непрерывно-дифференцируемых функций по координатам x и y в области G и дважды непрерывно-дифференцируемых по переменной t при $t \geq 0$ и принимает действительные значения.

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), (x, y) \in G \backslash J, J = \bigcup_{i=1}^{n} J_i, t \geq 0, \quad (2.1)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}_i(x, t) + V w_i'(x, t), x \in (b_i, c_i), \ i = \overline{1, n}, t \geq 0, \quad (2.2)$$

$$\varphi_y(x, H, t) = 0, x \in (0, x_0), t \geq 0, \quad (2.3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, x \in (0, x_0), t \geq 0, \quad (2.4)$$

$$\varphi(0,y,t)=0,\varphi(x_0,y,t)=0,y\in(0,y_0),t\geq 0. \tag{2.5}$$

Аэрогидродинамическое воздействие потока на элементы, согласно интегралу Лагранжа – Коши, определяется выражением

$$\begin{gathered}P_i(x,t)=\rho(\varphi_t^+(x,y_0,t)-\varphi_t^-(x,y_0,t))+\rho V(\varphi_x^+(x,y_0,t)- \\ -\varphi_x^-(x,y_0,t)),\;\; x\in(b_i,c_i),\; i=\overline{1,n},\;\; t\geq 0.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Индексы $x,\ y,\ t$ снизу обозначают частные производные по $x,\ y,\ t$; штрих и точка — частные производные по x и t соответственно; ρ — плотность потока; a – скорость звука в невозмущенном потоке газожидкостной среды $(a>V)$; $\varphi_t^{\pm}(x,y_0,t)=\lim\limits_{y\to y_0\pm 0}\varphi_t(x,y,t)$; $\varphi_x^{\pm}(x,y_0,t)=$ $=\lim\limits_{y\to y_0\pm 0}\varphi_x(x,y,t)$.

Рассмотрим нелинейную модель колебаний упругого тела с учетом продольных и поперечных составляющих деформаций элементов, моделируемых упругими пластинами, с учетом силового воздействия потока $P_i(x,t)$ на них. Тогда математическую постановку задачи 2.1–2.6 следует дополнить уравнениями

$$\left\{\begin{array}{l}-E_iF_i\left(u_i'(x,t)+\frac{1}{2}w_i'^2(x,t)\right)'+M_i\ddot{u}_i(x,t)=0,\\ -E_iF_i\left[w_i'(x,t)\left(u_i'(x,t)+\frac{1}{2}w_i'^2(x,t)\right)\right]'+D_iw_i''''(x,t)+\\ +M_i\ddot{w}_i(x,t)+N_i(t)w_i''(x,t)+\beta_{2i}\dot{w}_i''''(x,t)+\beta_{1i}\dot{w}_i(x,t)+\\ +\beta_{0i}w_i(x,t)=P_i(x,t),\quad x\in(b_i,c_i),\ t\geq 0.\end{array}\right. \tag{2.7}$$

Здесь $D_i=E_ih_i^3/(12(1-\nu_i^2))$ — изгибные жесткости элементов; h_i — толщина элементов; $M_i=h_i\rho_i$ — погонные массы элементов; E_i, ρ_i — модули упругости и линейные плотности элементов; $F_i=h_i/(1-\nu_i)$; $N_i(t)$ — сжимающие $(N_i>0)$ или растягивающие $(N_i<0)$ элементы силы; β_{2i}, β_{1i} — коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; β_{0i} — коэффициенты жесткости слоя обжатия; ν_i – коэффициенты Пуассона.

Сжимающие или растягивающие силы N_i могут зависеть от времени. Например, при изменении теплового воздействия на пластины с течением времени $N_i(t)$ имеют вид:

$$N_i\left(t\right)=N_{0i}+N_{Ti}(t),N_{Ti}(t)=\tfrac{T_{0i}(t)}{1-\nu_i},T_{0i}(t)=E_i\alpha_{Ti}\int\limits_{-h_i/2}^{h_i/2}T_i\left(z,t\right)dz,$$

где α_{Ti} – температурные коэффициенты линейного расширения; $T_i(z,t)$ – законы изменения температуры по толщине элементов; N_{0i} – постоянные составляющие усилий, созданные при закреплении элементов; $i=\overline{1,n}$.

Предположим, что концы упругих элементов закреплены либо жестко, либо шарнирно, тогда при $x=b_i$ и $x=c_i$ выполняется одно из условий:

1) жесткое защемление:

$$w_i(x,t) = w_i'(x,t) = u_i(x,t) = 0; \tag{2.8}$$

2) шарнирное неподвижное закрепление:

$$w_i(x,t) = w_i''(x,t) = u_i(x,t) = 0; \tag{2.9}$$

3) жесткое подвижное защемление:

$$w_i(x,t) = w_i'(x,t) = u_i'(x,t) = 0; \tag{2.10}$$

4) шарнирное подвижное закрепление:

$$w_i(x,t) = w_i''(x,t) = u_i'(x,t) + \tfrac{1}{2} {w_i'}^2(x,t) = 0. \tag{2.11}$$

Для определенности исследуем устойчивость в случае шарнирного неподвижного закрепления всех концов упругих элементов:

$$w_i(b_i,t) = w_i''(b_i,t) = u_i(b_i,t) = w_i(c_i,t) = w_i''(c_i,t) = u_i(c_i,t) = 0. \tag{2.12}$$

Для остальных способов закреплений концов элементов (различных комбинаций 2.8, 2.9, 2.10, 2.11) исследование устойчивости проводится аналогично.

Получили связанную краевую задачу 2.1–2.7, 2.12 для $(2n+1)$-й неизвестной функции – деформаций упругих элементов $u_i(x,t),\ w_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$ и потенциала скорости жидкости (газа) $\varphi(x,y,t)$.

Зададим начальные условия:

$$w_i(x,0) = f_{1i}(x), \quad \dot{w}_i(x,0) = f_{2i}(x), \quad i=\overline{1,n}, \tag{2.13}$$

$$u_i(x,0) = f_{3i}(x), \quad \dot{u}_i(x,0) = f_{4i}(x), \quad i=\overline{1,n}, \tag{2.14}$$

которые должны быть согласованы с краевыми условиями 2.12. Согласно определению функций $u_i(x,t)$, $w_i(x,t)$: $f_{1i}(x),\ f_{2i}(x) \in C^4[b_i,c_i]$, $f_{3i}(x),\ f_{4i}(x) \in C^2[b_i,c_i]$. Норма в пространствах $C^k[b_i,c_i]$ определяется равенством $\|f_{ji}\| = \sup\limits_{0\le m\le k} \max\limits_{x\in[b_i,c_i]} \left|\frac{\partial^m f_{ji}(x)}{\partial x^m}\right|$.

Зададим также начальные условия:

$$\varphi(x,y,0) = f_5(x,y), \quad \varphi_t(x,y,0) = f_6(x,y), \tag{2.15}$$

которые должны быть согласованы с краевыми условиями 2.3–2.5. Согласно определению функции $\varphi(x,y,t)$: $f_5(x,y),\ f_6(x,y) \in C^2\{G\}$. Норма в пространстве $C^2\{G\}$ определяется равенством

$$\|f_i\| = \sup_{0\le k+m\le 2} \max_{(x,y)\in G} \left|\frac{\partial^{m+k} f_i(x,y)}{\partial x^k \partial y^m}\right|.$$

3. Основные понятия

Определение 1. *Решение начально-краевой задачи 2.1–2.7, 2.12-2.15 для (2n+1)-й неизвестной функции* $w_i(x,t) \in C^{4,2}\{[b_i,c_i]\times R^+\}$, $i=\overline{1,n}$, $u_i(x,t) \in C^{2,2}\{[b_i,c_i]\times R^+\}$, $i=\overline{1,n}$, $\varphi(x,y,t) \in C^{2,2}\{G\times R^+\}$ *называется устойчивым по отношению к возмущениям начальных данных 2.13–2.15, если для любых сколь угодно малых положительных чисел* $\delta_j>0$, $j=\overline{1,2n+1}$ *найдутся числа* $\varepsilon_{ki}=\varepsilon_{ki}(\delta_1,\ldots,\delta_{2n+1})>0$, $k=\overline{1,4}$, $i=\overline{1,n}$, $\varepsilon_5=\varepsilon_5(\delta_1,\ldots,\delta_{2n+1})>0$, $\varepsilon_6=\varepsilon_6(\delta_1,\ldots,\delta_{2n+1})>0$, *такие, что для любых функций* $f_{1i}(x)$, $f_{2i}(x)\in C^4[b_i,c_i]$, $f_{3i}(x)$, $f_{4i}(x)\in\in C^2[b_i,c_i]$, $i=\overline{1,n}$ *и* $f_5(x,y)$, $f_6(x,y)\in C^2\{G\}$, *удовлетворяющих граничным условиям и условиям малости по норме* $\|f_{ki}(x)\|<\varepsilon_{ki}$, $k=\overline{1,4}$, $i=\overline{1,n}$, $\|f_5(x,y)\|<\varepsilon_5$, $\|f_6(x,y)\|<\varepsilon_6$, *будут выполнены неравенства* $|w_i(x,t)|<\delta_i, |u_i(x,t)|<\delta_{n+i}, x\in[b_i,c_i], i=\overline{1,n}$ *и* $|\varphi(x,y,t)|<\delta_{2n+1}$, $(x,y)\in G$ *для любого момента времени* $t>0$.

Аналогичные определения устойчивости по отношению к возмущениям начальных данных можно дать и по части переменных $w_i(x,t)$, $u_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, $\varphi(x,y,t)$, а также по некоторой совокупности их частных производных.

Определение 2. *Функционалом в пространствах* $C^{4,2}\{[b_i,c_i]\times R^+\}$, $C^{2,2}\{[b_i,c_i]\times R^+\}$, $C^{2,2}\{G\times R^+\}$ *называется закон, согласно которому функциям* $w_i(x,t)\in C^{4,2}\{[b_i,c_i]\times R^+\}$, $u_i(x,t)\in C^{2,2}\{[b_i,c_i]\times R^+\}$, $i=\overline{1,n}$, $\varphi(x,y,t)\in C^{2,2}\{G\times R^+\}$ *сопоставляется функция* $\Phi(w_1,\ldots,w_n,u_1,\ldots,u_n,\varphi)\in C^2\{R^+\}$.

Определение 3. *Дифференциальными операторами полиномиального вида будем называть следующие дифференциальные выражения:*

$$F_i^{l_1,s_1,l_2,s_2}(w_i,u_i,x,t)=F_{1i}(D^{0,0}w_i(x,t),D^{1,0}w_i(x,t),D^{0,1}w_i(x,t),...,$$
$$D^{l_1,s_1}w_i(x,t),D^{0,0}u_i(x,t),D^{1,0}u_i(x,t),D^{0,1}u_i(x,t),...,D^{l_2,s_2}u_i(x,t)),$$
$$x\in[b_i,c_i],\ i=\overline{1,n},\ t\geq 0;$$
$$F^{l_3,m_3,s_3}(\varphi,x,y,t)=F_2(D^{0,0,0}\varphi(x,y,t),...,D^{l_3,m_3,s_3}\varphi(x,y,t)),$$
$$(x,y)\in G,\ t\geq 0;$$
$$F_i^{l_1,s_1,l_2,s_2,l_3,m_3,s_3}(w_i,u_i,\varphi,x,y_0,t)=F_{3i}(D^{0,0}w_i(x,t),...,D^{l_1,s_1}w_i(x,t),$$
$$D^{0,0}u_i(x,t),...,D^{l_2,s_2}u_i(x,t),D^{0,0,0}\varphi(x,y_0,t),...,D^{l_3,m_3,s_3}\varphi(x,y_0,t)),$$
$$x\in[b_i,c_i],\ i=\overline{1,n},\ t\geq 0,$$

где $D^{l,s}w_i(x,t)=\dfrac{\partial^{l+s}w_i(x,t)}{\partial x^l\partial t^s}$, $D^{l,s}u_i(x,t)=\dfrac{\partial^{l+s}u_i(x,t)}{\partial x^l\partial t^s}$, $D^{l,m,s}\varphi(x,y,t)==\dfrac{\partial^{l+m+s}\varphi(x,y,t)}{\partial x^l\partial y^m\partial t^s}$; $F_{1i}(x_1,x_2,...)$, $F_2(x_1,x_2,...)$, $F_{3i}(x_1,x_2,...)$ — *полиномы, все мономы которых не ниже второго порядка, с ограниченными* *коэффициентами. Все коэффициенты непрерывно дифференцируемы по времени* t.

Лемма 1. *Если можно построить функционал*

$$\begin{gathered}\Phi(t) \equiv \Phi(w_1, \ldots, w_n, u_1, \ldots, u_n, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{b_i}^{c_i} F_i^{4,2,2,2}(w_i, u_i, x, t)dx + \\ + \iint_G F^{2,2,2}(\varphi, x, y, t)dxdy + \sum_{i=1}^{n} \int_{b_i}^{c_i} F_i^{4,2,2,2,2,2,2}(w_i, u_i, \varphi, x, y_0, t)dx,\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $w_i(x,t) \in C^{4,2}\left\{[b_i, c_i] \times R^+\right\}$, $u_i(x,t) \in C^{2,2}\left\{[b_i, c_i] \times R^+\right\}$, $i = \overline{1,n}$, $\varphi(x,y,t) \in C^{2,2}\left\{G \times R^+\right\}$ *– решение задачи 2.1–2.7, 2.12–2.15, такой что* $\Phi(t) \geq 0$, $\dot{\Phi}(t) \leq 0$*, то функции* $w_i(x,t)$ *и(или)* $\varphi(x,y,t)$ *и(или) их производные, входящие в положительно определенный полином в выражении для* $\Phi(t)$ *или в положительно определенную нижнюю оценку* $\Phi_1(t)$ *этого функционала* $\Phi(t)$ $(\Phi(t) \geq \Phi_1(t) \geq 0)$*, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных 2.13–2.15.*

Доказательство. Из неравенств $\Phi(t) \geq 0$, $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ следует, что

$$0 \leq \Phi(t) \leq \Phi(0). \tag{3.2}$$

Неравенство $\Phi(t) \geq 0$ в 3.2 означает, что, используя интегральные неравенства, можно построить положительно определенную нижнюю оценку $\Phi_1(t) \geq 0$ этого функционала в виде суммы интегралов от положительно полуопределенных полиномов. Пусть хотя бы один из них является положительно определенным. Тогда, используя метод Лагранжа, можно получить оценку функционала снизу интегралом от каждой функции $D^{l,s}w_i(x,t), i = \overline{1,n}$, и(или) $D^{l,s}u_i(x,t), i = \overline{1,n}$, и(или) $D^{l,m,s}\varphi(x,y,t)$ в четной степени, входящей в этот полином, умноженным на ненулевую положительную ограниченную величину. Если интегралы $\iint_G \left(D^{l,m,s}\varphi(x,y,t)\right)^{2v}dxdy$, $\int_{b_i}^{c_i}\left(D^{l,s}w_i(x,t)\right)^{2v}dx$, $\int_{b_i}^{c_i}\left(D^{l,s}u_i(x,t)\right)^{2v}dx$, $i = \overline{1,n}$ малы, то в силу непрерывности функций $D^{l,s}w_i(x,t), D^{l,s}u_i(x,t)$, $i = \overline{1,n}$, $D^{l,m,s}\varphi(x,y,t)$ и ограниченности области G, следует малость функций по модулю: $\left|D^{l,s}w_i(x,t))\right| < \delta_i$, $\left|D^{l,s}u_i(x,t))\right| < \delta_{i+n}$, $i = \overline{1,n}$, $\left|D^{l,m,s}\varphi(x,y,t)\right| < \delta_{2n+1}$.

Неравенство $\Phi(t) \leq \Phi(0)$ в 3.2 означает, что для любых функций $f_{1i}(x)$, $f_{2i}(x) \in C^4[b_i, c_i]$, $f_{3i}(x)$, $f_{4i}(x) \in C^2[b_i, c_i]$, $i = \overline{1,n}$, $f_5(x,y)$, $f_6(x,y) \in C^2\{G\}$, входящих в $\Phi(0)$ и удовлетворяющих граничным условиям и условиям малости по норме $\|f_{ki}(x)\| < \varepsilon_{ki}$, $k = \overline{1,4}$, $i = \overline{1,n}$, $\|f_5(x,y)\| < \varepsilon_5$, $\|f_6(x,y)\| < \varepsilon_6$, найдутся зависимости $\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ki}(\delta_1, \ldots, \delta_{2n+1})$, $k = \overline{1,4}$, $i = \overline{1,n}$, $\varepsilon_5 = \varepsilon_5(\delta_1, \ldots, \delta_{2n+1})$, $\varepsilon_6 = \varepsilon_6(\delta_1, \ldots, \delta_{2n+1})$ для любого момента времени $t > 0$.

Следовательно, согласно определению 1 функции, входящие в положительно определенный полином в выражении для $\Phi(t)$ или в положительно определенную нижнюю оценку $\Phi_1(t)$ этого функционала $\Phi(t)$, будут устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных 2.13–2.15. □

Согласно лемме 1 требуется построить функционал 3.1, соответствующий задаче 2.1–2.7, 2.12–2.15, и с помощью интегральных неравенств получить условия неотрицательности всех подынтегральных мономов в нижней оценке функционала (причем хотя бы один из них должен быть положительно определен), и условия неположительности всех подынтегральных мономов в верхней оценке производной от функционала. Затем на основании леммы 1 сделать вывод об устойчивости функций, входящих в положительно определенные полиномы в нижней оценке функционала.

При составлении функционала требуется учитывать необходимые условия положительной определенности полиномов: 1) наименьший порядок мономов должен быть четным; 2) коэффициенты при отдельно стоящих функциях в четной степени должны быть положительными. В силу первого условия все положительно определенные полиномы можно интерпретировать как квадратичные формы и при выводе условий их положительной определенности использовать критерий Сильвестра.

4. Теорема об устойчивости

Введем обозначение: λ_{1i} – наименьшие собственные значения краевых задач для уравнения $\psi'''' = -\lambda\psi''$, $x \in (b_i, c_i)$, $i = \overline{1,n}$ с краевыми условиями $\psi(b_i) = \psi''(b_i) = \psi(c_i) = \psi''(c_i) = 0$, соответствующими условиям 2.12 для функций $w_i(x,t)$.

Теорема 1. *Пусть для любого момента времени $t > 0$ выполняются условия*

$$\dot{N}_i(t) \geq 0,\ \beta_{2i} \geq 0,\ \beta_{1i} \geq 0,\ i = \overline{1,n}, \tag{4.1}$$

$$\min_{i=\overline{1,n}} \left(\lambda_{1i} D_i - N_i(t)\right) > \frac{V^2 \rho H \left((a^2 - V^2)\pi^2 (H - y_0) y_0 + 2a^2 x_0^2\right)}{2(a^2 - V^2)\pi^2 y_0 (H - y_0)}. \tag{4.2}$$

Тогда решение $w_i(x,t)$, $i = \overline{1,n}$, $\varphi(x,y,t)$ задачи 2.1–2.7, 2.12–2.15 и производные $\varphi_t(x,y,t)$, $\varphi_x(x,y,t)$, $\varphi_y(x,y,t)$, $w_i'(x,t)$, $\dot{w}_i(x,t)$, $w_i''(x,t)$, $i = \overline{1,n}$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных 2.13–2.15.

Доказательство. Рассмотрим функционал:

$$\begin{gathered}
\Phi(t)=\iint\limits_{G\setminus J}\left(\varphi_t^2(x,y,t)+\left(a^2-V^2\right)\varphi_x^2(x,y,t)+a^2\varphi_y^2(x,y,t)\right)dxdy+\\
+2a^2V\sum_{i=1}^{n}\int_{b_i}^{c_i}(\varphi^+(x,y_0,t)-\varphi^-(x,y_0,t))w_i'(x,t)dx+\\
+\frac{a^2}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\int_{b_i}^{c_i}\left(E_iF_i\left(u_i'(x,t)+\tfrac{1}{2}w_i'^2(x,t)\right)^2+M_i\left(\dot u_i^2(x,t)+\dot w_i^2(x,t)\right)+\right.\\
\left.+D_iw_i''^2(x,t)+\beta_{0i}w_i^2(x,t)-N_i(t)w_i'^2(x,t)\right)dx.
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Для функций $\varphi(x,y,t)$ и $w_i(x,t),\ u_i(x,t),\ i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих уравнениям 2.1 и 2.6, 2.7, производная от Φ по t примет вид

$$\begin{gathered}
\dot\Phi(t)=2\iint\limits_{G\setminus J}\left(\varphi_t\left(-2V\varphi_{xt}-V^2\varphi_{xx}+a^2(\varphi_{xx}+\varphi_{yy})\right)+\left(a^2-V^2\right)\varphi_x\varphi_{xt}+\right.\\
\left.+a^2\varphi_y\varphi_{yt}\right)dxdy+2a^2V\sum_{i=1}^{n}\int_{b_i}^{c_i}\left(\left(\varphi_t^+(x,y_0,t)-\varphi_t^-(x,y_0,t)\right)w_i'(x,t)+\right.\\
\left.+\left(\varphi^+(x,y_0,t)-\varphi^-(x,y_0,t)\right)\dot w_i'(x,t)\right)dx+\frac{2a^2}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\int_{b_i}^{c_i}\left(E_iF_i\left(u_i'+\tfrac{1}{2}w_i'^2\right)\times\right.\\
\times\left(\dot u_i'+w_i'\dot w_i'\right)+E_iF_i\dot u_i\left(u_i'(x,t)+\tfrac{1}{2}w_i'^2(x,t)\right)'+\\
+\dot w_i\left\{\rho\left(\varphi_t^+(x,y_0,t)-\varphi_t^-(x,y_0,t)\right)+\rho V\left(\varphi_x^+(x,y_0,t)-\varphi_x^-(x,y_0,t)\right)+\right.\\
+E_iF_i\left[w_i'(x,t)\left(u_i'(x,t)+\tfrac{1}{2}w_i'^2(x,t)\right)\right]'-D_iw_i''''-\beta_{2i}\dot w_i''''-N_i(t)w_i''-\\
\left.\left.-\beta_{1i}\dot w_i-\beta_{0i}w_i\right\}+D_iw_i''\dot w_i''-\tfrac{1}{2}\dot N_i(t)w_i'^2-N_i(t)w_i'\dot w_i'+\beta_{0i}w_i\dot w_i\right)dx.
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Применяя формулу Грина и формулу интегрирования по частям с учетом условий 2.2-2.5, 2.12, из 4.4 получим

$$\dot\Phi(t)=-\frac{2a^2}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\int_{b_i}^{c_i}\left(\tfrac{1}{2}\dot N_i(t)w_i'^2+\beta_{2i}\,\dot w_i''^{\,2}+\beta_{1i}\dot w_i^2\right)dx.$$

Пусть выполняются условия 4.1, тогда

$$\dot\Phi(t)\le 0. \tag{4.5}$$

Проведем оценки для функционала с учетом граничных условий 2.12. Воспользуемся неравенством Релея [10]:

$$\int_{b_i}^{c_i} w_i''^2(x,t)dx\ge\lambda_{1i}\int_{b_i}^{c_i} w_i'^2(x,t)dx,\ i=\overline{1,n}, \tag{4.6}$$

где λ_{1i} определены выше.

Оценим $\Phi(t)$ снизу:

$$\Phi(t) \geq \iint\limits_{G\backslash J} \left(\varphi_t^2 + \left(a^2 - V^2\right)\varphi_x^2 + a^2\varphi_y^2\right) dxdy + 2a^2 V \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{b_i}^{c_i} (\varphi^+(x, y_0, t) - \\ -\varphi^-(x, y_0, t)) w_i'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{b_i}^{c_i} (\lambda_{1i} D_i - N_i(t))\, w_i'^2 dx. \tag{4.7}$$

Для оценки двойного интеграла разобьем область $G\backslash J$ на две области $G_1 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0\}$ и $G_2 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0,\ y_0 < y < H\}$. Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$\iint\limits_{G_1} \varphi_x^2 dxdy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \iint\limits_{G_1} \varphi^2 dxdy, \quad \iint\limits_{G_2} \varphi_x^2 dxdy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \iint\limits_{G_2} \varphi^2 dxdy. \tag{4.8}$$

Согласно неравенству Коши - Буняковского, имеем также

$$\left(\int\limits_{y}^{y_0} \varphi_y dy\right)^2 \leq \int\limits_{y}^{y_0} 1^2 dy \int\limits_{y}^{y_0} \varphi_y^2 dy.$$

Следовательно,

$$(\varphi^-(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 \leq (y_0 - y) \int\limits_{y}^{y_0} \varphi_y^2 dy \leq (y_0 - y) \int\limits_{0}^{y_0} \varphi_y^2 dy.$$

Интегрируя от 0 до y_0 по переменной y, получим

$$\int\limits_{0}^{y_0} (\varphi^-(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 dy \leq \frac{y_0^2}{2} \int\limits_{0}^{y_0} \varphi_y^2 dy.$$

Интегрируя от 0 до x_0 по переменной x, окончательно находим

$$\iint\limits_{G_1} \varphi_y^2 dxdy \geq \frac{2}{y_0^2} \iint\limits_{G_1} (\varphi^-(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 dxdy. \tag{4.9}$$

Аналогично, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\left(\int\limits_{y_0}^{y} \varphi_y dy\right)^2 \leq \int\limits_{y_0}^{y} 1^2 dy \int\limits_{y_0}^{y} \varphi_y^2 dy.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{G_2} \varphi_y^2 dxdy \geq \frac{2}{(H - y_0)^2} \iint\limits_{G_2} (\varphi(x, y, t) - \varphi^+(x, y_0, t))^2 dxdy. \tag{4.10}$$

Применяя 4.8–4.10 для 4.7, получим неравенство

$$\Phi(t) \geq \iint\limits_{G_1} \left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2)\frac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2 + \frac{2a^2}{y_0^2} (\varphi^-(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2\right) dxdy +$$

$$+\iint\limits_{G_2}\left(\varphi_t^2+(a^2-V^2)\tfrac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2+\tfrac{2a^2}{(H-y_0)^2}\left(\varphi^+(x,y_0,t)-\varphi(x,y,t)\right)^2\right)dxdy+$$

$$+2a^2V\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{b_i}^{c_i}(\varphi^+(x,y_0,t)-\varphi^-(x,y_0,t))w_i'(x,t)dx+ \tag{4.11}$$

$$+\tfrac{a^2}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{b_i}^{c_i}\left(\lambda_{1i}D_i-N_i(t)\right)w_i'^2dx$$

Введем обозначения

$$K(t)=\min_{i=\overline{1,n}}\left(\lambda_{1i}D_i-N_i(t)\right),$$

$$f(x,t)=\begin{cases}0, & x\in(0,b_1]\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}[c_i,b_{i+1}]\bigcup[c_n,x_0),\\ w_i'(x,t), & x\in(b_i,c_i).\end{cases}$$

тогда из 4.11 получим неравенство

$$\Phi(t)\geq\iint\limits_{G_1}\left(\varphi_t^2+(a^2-V^2)\tfrac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2+\tfrac{2a^2}{y_0^2}\left(\varphi^-(x,y_0,t)-\varphi(x,y,t)\right)^2\right)dxdy+$$

$$+\iint\limits_{G_2}\left(\varphi_t^2+(a^2-V^2)\tfrac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2+\tfrac{2a^2}{(H-y_0)^2}\left(\varphi^+(x,y_0,t)-\varphi(x,y,t)\right)^2\right)dxdy+$$

$$+2a^2V\int\limits_0^{x_0}(\varphi^+(x,y_0,t)-\varphi^-(x,y_0,t))f(x,t)dx+\tfrac{a^2K(t)}{\rho}\int\limits_0^{x_0}f^2(x,t)dx=$$

$$=\iint\limits_{G_1}\Big[\varphi_t^2(x,y,t)+\left((a^2-V^2)\tfrac{\pi^2}{x_0^2}+\tfrac{2a^2}{y_0^2}\right)\varphi^2(x,y,t)-\tfrac{4a^2}{y_0^2}\varphi^-(x,y_0,t)\varphi(x,y,t)+$$

$$+\tfrac{2a^2}{y_0^2}\left(\varphi^-(x,y_0,t)\right)^2+\tfrac{2a^2V}{y_0}\varphi^-(x,y_0,t)f(x,t)+\tfrac{a^2K(t)\chi}{\rho y_0}f^2(x,t)\Big]dxdy+$$

$$+\iint\limits_{G_2}\Big[\varphi_t^2(x,y,t)+\left((a^2-V^2)\tfrac{\pi^2}{x_0^2}+\tfrac{2a^2}{(H-y_0)^2}\right)\varphi^2(x,y,t)-$$

$$-\tfrac{4a^2}{(H-y_0)^2}\varphi^+(x,y_0,t)\varphi(x,y,t)+\tfrac{2a^2}{(H-y_0)^2}\left(\varphi^+(x,y_0,t)\right)^2+ \tag{4.12}$$

$$+\tfrac{2a^2V(1-\chi)}{H-y_0}\varphi^+(x,y_0,t)f(x,t)+\tfrac{a^2K(t)(1-\chi)}{\rho(H-y_0)}f^2(x,t)\Big]dxdy,$$

где $\chi\in(0,1)$ – дополнительный параметр.

Введем обозначения

$$d_{11}^{(1)}=\tfrac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2}+\tfrac{2a^2}{y_0^2},\quad d_{22}^{(1)}=d_{12}^{(1)}=\tfrac{2a^2}{y_0^2},$$
$$d_{23}^{(1)}=\tfrac{a^2V}{y_0},\quad d_{33}^{(1)}=\tfrac{a^2K(t)\chi}{\rho y_0}. \tag{4.13}$$

Рассмотрим квадратичную форму относительно $\varphi(x,y,t)$, $\varphi^{-}(x,y_0,t)$, $f(x,t)$ в 4.12. Соответствующая матрица формы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} d_{11}^{(1)} & -d_{12}^{(1)} & 0 \\ -d_{12}^{(1)} & d_{22}^{(1)} & d_{23}^{(1)} \\ 0 & d_{23}^{(1)} & d_{33}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра, запишем условия положительной определенности квадратичной формы

$$\Delta_1^{(1)} = d_{11}^{(1)} > 0, \Delta_2^{(1)} = d_{11}^{(1)} d_{22}^{(1)} - {d_{12}^{(1)}}^2 = \frac{2(a^2-V^2)\pi^2 a^2}{x_0^2 y_0^2} > 0, \qquad (4.14)$$

$$\Delta_3^{(1)} = d_{33}^{(1)} \Delta_2^{(1)} - {d_{23}^{(1)}}^2 d_{11}^{(1)} > 0. \qquad (4.15)$$

Согласно 4.13 условия 4.14 выполняются. Неравенство 4.15 примет вид:

$$K(t) > \frac{V^2 x_0^2 \rho y_0}{2(a^2-V^2)\pi^2 \chi} \left(\frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right). \qquad (4.16)$$

Рассматривая аналогично квадратичную форму относительно $\varphi(x,y,t)$, $\varphi^{+}(x,y_0,t)$, $f(x,t)$ в 4.12, получим условие

$$K(t) > \frac{V^2 x_0^2 \rho (H-y_0)}{2(a^2-V^2)\pi^2(1-\chi)} \left(\frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(H-y_0)^2} \right). \qquad (4.17)$$

Из неравенств 4.16, 4.17 найдем оптимальный параметр χ, обеспечивающий наиболее широкую область значений параметров, входящих в условия 4.16, 4.17. Для этого приравняем их правые части и получим

$$\chi = \frac{\left((a^2-V^2)\pi^2 y_0^2 + 2a^2 x_0^2\right)(H-y_0)}{(a^2-V^2)\pi^2 H (H-y_0) y_0 + 2a^2 x_0^2 H}. \qquad (4.18)$$

Подставляя 4.18 в 4.16 и 4.17, получим, что оба эти условия примут вид 4.2.

Так как при условии 4.2 все квадратичные формы в 4.12 положительно определены, то из 4.12 окончательно получим оценку $\Phi(t) \ge 0$. Учитывая 4.5, согласно лемме 1 можно сделать выводы: 1) функции $\varphi(x,y,t)$, $\varphi_t(x,y,t)$, $w_i'(x,t)$, $i=\overline{1,n}$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных 2.13–2.15 согласно 4.12; 2) функции $w_i(x,t)$, $w_i''(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, $\varphi_x(x,y,t)$, $\varphi_y(x,y,t)$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных 2.13–2.15 согласно 4.3. □

5. Заключение

Предложена математическая модель вибрационного устройства, представляющего собой проточный канал с n упругими элементами. На основе построенного функционала типа Ляпунова для нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными получены достаточные условия динамической устойчивости упругих элементов при протекании в канале дозвукового потока жидкости или газа (в модели идеальной сжимаемой среды). Условия накладывают ограничения на скорость однородного потока, сжимающие (растягивающие) элементы усилия, изгибные жесткости упругих элементов и другие параметры механической системы.

Список литературы

1. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной / Р. В. Агеев, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, А. А. Попова // Тр. МАИ. – 2014. – № 78. – С. 1–13.
2. Анкилов А. В. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов. – Ульяновск : УлГТУ, 2015. – 146 с.
3. Анкилов А. В. Математическая модель вибрационного устройства / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова // Автоматизация процессов управления. – 2014. – № 3(37). – С. 58–67.
4. Анкилов А. В. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов. – Ульяновск : УлГТУ, 2013. – 322 с.
5. Анкилов А. В. Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Е. П. Семенова // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. – 2009. – № 2(38), вып. 1. – С. 7–17.
6. Анкилов А. В. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – 220 с.
7. Анкилов А. В. Устойчивость решений некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов // Вестн. Самар. гос. ун-та. – 2008. – № 8/1(67). – С. 331–344.
8. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К. Гидродинамический излучатель // Патент 2062662 Российская Федерация, МПК6 B 06 B 1/18, 1/20.; заявитель и патентообладатель Ульянов.гос. техн. ун-т. № 5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюл. №18.
9. Вельмисов П. А. Метод групповых преобразований в некоторых двухточечных граничных задачах, описывающих формы изгиба стержней / П. А. Вельмисов, Б. В. Логинов // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7, № 5. – С. 37–38.
10. Коллатц Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М. : Наука, 1968. – 503 с.
11. Математическое моделирование динамики взаимодействия сильновязкой жидкости со стенками канала, установленного на упругом основании / Л. И.

Могилевич, В. С. Попов, А. А. Попова, А. В. Христофорова // Динамика систем, механизмов и машин. – 2016. – Т. 3, № 1. – С. 350–354.
12. Ankilov A. V. Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem / A. V. Ankilov, P. A. Vel'misov // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 219, N 1. – P. 14–26. https://doi.org/10.1007/s10958-016-3079-4
13. Ankilov A. V. Mathematical Modelling of Dynamics and Stability of Elastic Elements of Vibration Devices / A. V. Ankilov, P. A. Velmisov // Proceeding of 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON 2015, Saint Petersburg, Russia, 24-26 June 2015). – IFAC-PapersOnLine, 2015. – Vol. 48, iss. 11. – P. 970–975. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.09.318
14. Askari E. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface / E. Askari, K.-H. Jeong, M. Amabili // Journal of sound and vibration. – 2013. – Vol. 332, N 12. – P. 3064–3085. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007
15. Faal R. T. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support / R. T. Faal, D. Derakhshan // Procedia Engineering. – 2011. – N 14. – P. 2986–2993. https://doi.org/ 10.1016/j.proeng.2011.07.376
16. Gatica G. N. Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D / G. N. Gatica, N. Heuer, S. Meddahi // Numer. Methods Partial Differ. Equations. – 2014. – Vol. 30, N 4. – P. 1211–1233. https://doi.org/10.1002/num.21866
17. Kontzialis K. Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions / K. Kontzialis, K. Moditis, M. P. Paidoussis // Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME. – 2017. – N 139(3). – P. 1–8. https://doi.org/10.1115/1.4034405
18. Loginov B. V. Bifurcation and Stability in Some Problems of Continua Mechanics / B. V. Loginov, V. A. Trenogin, P. A. Velmisov // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1996. – Vol. 76, supp. 2. – P. 241–244.
19. Moditis K. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow / K. Moditis, M. Paidoussis, J. Ratigan // Journal of Fluids and Structures. – 2016. – № 63. – P. 120–139. https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002
20. Mogilevich L. I. On the dynamic interaction of an elastic cylindrical shell with a fluid laminar stream inside in application to pipeline transportation / L. I. Mogilevich, A. A. Popova, V. S. Popov // Science and technology in transport. – 2007. – N 2. – P. 69–72.
21. Paidoussis M. P. The Canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics // J. Sound and Vibr. – 2008. – N 3 (310). – P. 462–492. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.065
22. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. – Kluwer Academic Publ., 2002. – 547 p.

Вельмисов Петр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный технический университет, Россия, 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32, тел.: (8422) 778117 (e-mail: velmisov@ulstu.ru)

Анкилов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Ульяновский государственный технический университет, Россия, 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32, тел.: (8422) 778117 (e-mail: ankil@ulstu.ru)

Поступила в редакцию 25.02.18

P. A. Velmisov, A. V. Ankilov

On Dynamic Stability of a Nonlinear Aeroelastic System

Abstract. A nonlinear mathematical model of a device related to vibratory technology is considered. The device is intended for the intensification of technological processes, for example, the mixing process. The action of such devices is based on the vibrations of the elastic elements when they are flowed by the flow of the mixing medium. The dynamical stability of n elastic elements located inside the flow channel is studied. The subsonic flow of the gas-liquid medium (in the model of an ideal compressible medium) is considered. The definition of the stability of an elastic body corresponds to the concept of the stability of dynamical systems by Lyapunov. The model is described by a coupled nonlinear system of partial differential equations for unknown functions - the velocity potential of a gas-liquid medium and deformations of elastic elements. On the basis of the construction of the functional, the sufficient conditions for dynamic stability are obtained. The conditions impose restrictions on the flow velocity of the gas-liquid medium, flexural rigidity of elastic elements, and other parameters of the mechanical system.

Keywords: mathematical modeling, aerohydrodelasticity, dynamic stability, system of partial differential equations, functional.

References

1. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Dvizhenie vyazkoy zhidkosti v ploskom kanale, obrazovannom vibriruyushchim shtampom i sharnirno opertoy plastinoy. *Trudy MAI*, 2014, no 78, pp. 1-13. (in Russian)
2. Ankilov A.V., Velmisov P.A. *Funktsionaly Lyapunova v nekotorykh zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti aerouprugikh konstruktsiy.* Ul'yanovsk, UlGTU Publ., 2015. 146 p. (in Russian)
3. Ankilov A.V., Velmisov P.A., Tamarova Yu.A. Matematicheskaya model' vibratsionnogo ustroystva[The dynamical stability of an elastic element of the flow channel] *Avtomatizatsiya protsessov upravleniya*, 2014, no 3(37), pp. 58–67. (in Russian)
4. Ankilov A.V., Velmisov P.A. *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti deformiruemykh elementov konstruktsiy pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii.* Ul'yanovsk, UlGTU Publ., 2013. 322 p. (in Russian)
5. Ankilov A.V., Velmisov P.A., Semenova E.P. Issledovanie dinamicheskoy ustoychivosti uprugikh elementov stenok kanala. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2009. no 2(38), iss. 1. pp. 7-17. (in Russian)
6. Ankilov A.V., Velmisov P.A. *Dinamika i ustoychivost' uprugikh plastin pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii.* Ul'yanovsk : UlGTU Publ., 2009. 220 p. (in Russian)
7. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Ustoychivost' resheniy nekotorykh klassov integro-differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2008, no 8/1(67), pp. 331-344. (in Russian)

8. Velmisov P.A., Gorshkov G.M., Ryabov G.K. *Gidrodinamicheskiy izluchatel'*. Patent 2062662 Rossiyskaya Federatsiya, MPK6 V 06 V 1/18, 1/20.; zayavitel' i patentoobladatel' Ul'yanovskiy gos. tekhnich. un-t. № 5038746/28; zayavl. 20.07.92; opubl. 27.06.96, Byul. №18. (in Russian)
9. Velmisov P.A., Loginov B.V. Metod gruppovykh preobrazovaniy v nekotorykh dvukhtochechnykh granichnykh zadachakh, opisyvayushchikh formy izgiba sterzhney. *Matematicheskoe modelirovanie*, 1995, vol. 7, no 5, pp. 37-38. (in Russian)
10. Kollatz L. *Zadachi na sobstvennye znacheniya*. M.: Nauka, 1968. 503 p. (in Russian)
11. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Hristoforova A.V. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki vzaimodeystviya sil'novyazkoy zhidkosti so stenkami kanala, ustanovlennogo na uprugom osnovanii. *Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin*, 2016, vol. 3, no 1, pp. 350-354. (in Russian)
12. Ankilov A.V., Vel'misov P.A. Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 219, no 1, pp. 14-26. https://doi.org/10.1007/s10958-016-3079-4
13. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Mathematical Modelling of Dynamics and Stability of Elastic Elements of Vibration Devices. *Proceeding of 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON 2015, Saint Petersburg, Russia, 24-26 June 2015). IFAC-PapersOnLine,* 2015, vol. 48, is. 11, pp. 970-975. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.09.318
14. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface. *Journal of sound and vibration*, 2013, vol. 332, no. 12. pp. 3064–3085. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007
15. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support. *Procedia Engineering*, 2011, no 14, pp. 2986-2993. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376
16. Gatica G.N., Heuer N., Meddahi S. Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D. *Numer. Methods Partial Differ. Equations,* 2014, vol. 30, no 4, pp. 1211–1233. https://doi.org/10.1002/num.21866
17. Kontzialis K., Moditis K., Paidoussis M. P. Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME,* 2017, vol. 139, no 3, pp. 1-8. https://doi.org/10.1115/1.4034405
18. Loginov B.V., Trenogin V.A., Velmisov P.A. Bifurcation and stability in some problems of continua mechanics. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1996, vol. 76, supp. 2, pp. 241-244.
19. Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow. *Journal of Fluids and Structures,* 2016, no 63. pp. 120-139. https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002
20. Mogilevich L.I., Popova A.A., Popov V.S. On the dynamic interaction of an elastic cylindrical shell with a fluid laminar stream inside in application to pipeline transportation. *Science and technology in transport,* 2007, no 2. pp. 69-72.
21. Paidoussis M. P. The Canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics. *J. Sound and Vibr,* 2008, no 3, vol. 310, pp. 462-492. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.065
22. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications.* Kluwer Academic Publischers, 2002. 547 p.

Velmisov Petr Alexandrovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Ulyanovsk State Technical University, 32, Severny Venets st., Ulyanovsk, 432027, Russian Federation, tel.: (8422)778117
(e-mail: velmisov@ulstu.ru)

Ankilov Andrey Vladimirovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Ulyanovsk State Technical University, 32, Severny Venets st., Ulyanovsk, 432027, Russian Federation, tel.: (8422)778117
(e-mail: ankil@ulstu.ru)

Received 25.02.18