Серия «Математика»
2024. Т. 49. С. 16—31

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.977.5, 519.863
MSC 49M99, 91B55
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.16

Оптимизация в модели управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания

И. В. Лутошкин[1✉], **М. С. Рыбина**[1]

[1] Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Российская Федерация
✉ lutoshkiniv@ulsu.ru

Аннотация. В статье предлагается модификация модели управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания с учетом социальных, биологических и экономических факторов. Модель представляет собой задачу оптимального управления с запаздыванием по фазовым переменным. Предлагаемая модификация модели заключается в одновременном использовании нескольких критериев качества для оценки стратегий управления, для чего предлагаются два подхода. Один из подходов основан на приведении критериев к общим единицам измерения за счёт использования такого показателя, как ценность статистической жизни. Второй заключается в нормализации критериев. В работе проведены вычислительные эксперименты с использованием обеих модификаций модели; в частности, для второго подхода выполнена серия вычислений с различными комбинациями значимости критериев. В экспериментах использовались значения параметров модели, оцененные на основе статистических данных о пандемии COVID-19 в Российской Федерации и Ульяновской области. Для поиска решения применялась модификация численного метода параметризации, развиваемого авторами. Полученные оптимальные решения для Российской Федерации и Ульяновской области при использовании одного и того же функционала не совпадают. Такой результат может говорить о том, что для каждого региона желательно выбирать специфическую стратегию управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, анализ оптимального решения, экономическая система, массовое заболевание, COVID-19

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-28-00542, https://rscf.ru/project/24-28-00542/

Ссылка для цитирования: Лутошкин И. В., Рыбина М. С. Оптимизация в модели управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024.

Т. 49. С. 16–31.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.16

Research article

Optimization in the Model of Control over a Socio-economic System in Conditions of a Mass Disease

Igor V. Lutoshkin[1✉], **Maria S. Rybina**[1]

[1] Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russian Federation
✉ lutoshkiniv@ulsu.ru

Abstract. This article considers further development of the mathematical model that allows predicting the socio-economic situation and choosing the optimal management strategy in conditions of a mass disease. The model is a dynamic optimal control problem with a delay in phase variables. It takes into account social, biological and economic factors. The proposed modification of the model consists in simultaneous use of several quality criteria for evaluating management strategies, for which two approaches are proposed. The first approach is based on the reduction of criteria to same unit of measurement, which is the value of a statistical life. The second one consists of normalization of the criteria. Computational experiments were carried out using both modifications of the model; in particular, for the second approach, a series of calculations with different combinations of criteria significance was performed. The experiments used the values of the model parameters estimated on the basis of statistical data on the COVID-19 pandemic in the Russian Federation and the Ulyanovsk region. A modification of the numerical parameterization method developed by the authors was used to find a solution. The optimal solutions obtained for the Russian Federation and the Ulyanovsk region do not coincide when using the same objective functional. Such a result may indicate that it is desirable to choose a specific management strategy for each region.

Keywords: optimal control, optimal solution analysis, economic system, mass disease, COVID-19

Acknowledgements: The research was financially supported by the Russian Science Foundation No. 24-28-00542, https://rscf.ru/en/project/24-28-00542/

For citation: Lutoshkin I. V., Rybina M. S. Optimization in the Model of Control over a Socio-economic System in Conditions of a Mass Disease. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 16–31. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.16

1. Введение

Математическое моделирование развития массовых заболеваний привело к созданию моделей, большинство которых применяются для прогнозирования развития эпидемий и пандемий. Первый тип моделей связан с использованием статистических методов [6; 8; 14]. Следующий тип моделей характеризуется наличием связей в виде системы дифференциальных либо интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [8;12;14]. Третий тип моделей – модели управления. Математическое моделирование эпидемий на на основе задач оптимального управления (ОУ) рассматривалось рядом авторов [7;9;11;13]: в качестве управления рассматривалась вакцинация, проводилась дифференциация населения по возрастной компоненте, социальным группам и т. д. При этом данные модели являются медико-биологическими, в них слабо отражаются социальные показатели, которые существенно влияют на поведение населения в условиях эпидемии.

Требуется построение нового класса моделей, когда в рамках единого подхода рассматриваются не только медико-биологические факторы, но и социально-экономические. В работах [4; 10] предложена математическая модель управления социально-экономической системой (регионом или государством) в условиях массового заболевания. Она одновременно учитывает как социально-биологические, так и экономические факторы.

В [4] проанализирована управляющая стратегия, реализованная в России и Ульяновской области во время пандемии COVID-19. В [10] представлены оптимальные решения при различных значениях параметров модели. В вычислительных экспериментах [10] модель рассматривается либо с экономическим критерием

$$\int_{t_0}^{T} \pi(t)dt \to \max_{u_1,u_2,u_3,\tau_1,\tau_2}, \tag{1.1}$$

либо с социальным

$$\int_{t_0}^{T} E(t)dt \to \min_{u_1,u_2,u_3,\tau_1,\tau_2}. \tag{1.2}$$

Здесь π — прибыль экономического субъекта; E — численность заразившихся людей, у которых заболевание находится в инкубационной стадии; u_1 — затраты в единицу времени на переоборудование существующих койко-мест для размещения заболевших; u_2 — затраты в единицу времени на увеличение числа койко-мест за счёт строительства новых больниц; u_3 — затраты в единицу времени на информационную кампанию по борьбе с заболеванием; τ_1 — момент времени, когда вводятся ограничительные меры с целью сдержать распространение заболевания; τ_2 — момент времени, когда происходит снятие введённых ограничений.

Экономический критерий состоит в максимизации прибыли системы, социальный — в минимизации количества заболевших на интервале времени от t_0 до T. Эти критерии между собой слабосогласованы и в общем случае противоречивы. Одновременный учет обоих критериев представляет собой отдельную задачу.

В [10] сформулирована линейная свертка обоих критериев в следующий функционал:

$$\int_{t_0}^{T} (\alpha_1 \pi(t) - \alpha_2 E(t))dt \to \max_{u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2}, \tag{1.3}$$

здесь α_1, α_2 — весовые параметры, такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Значения этих параметров выбираются экспертами, они определяют субъективную значимость свертываемых критериев.

При вычислительных экспериментах с использованием в модели [4; 10] функционала (1.3) возникли затруднения. Они были обусловлены используемыми единицами измерения и существенной (на несколько порядков) разницей между значениями компонент функционала.

2. Общая постановка задачи

Пусть P — количество людей, которые соблюдают ограничительные меры (например, режим самоизоляции) и тем самым снижают для себя риск заражения; S — количество людей, не соблюдающих ограничительные меры и, следовательно, потенциально подверженных заражению; I — количество заболевших (учитываются лица как с бессимптомной формой заболевания, так и с явной); Q — количество заболевших, которые были госпитализированы; R — количество выздоровевших; D — количество умерших вследствие заболевания.

Приведем уравнения, представленные в [4; 10].

Бухгалтерская прибыль экономического субъекта в модели представляется равенством

$$\pi(t) = Y(t) - u_1(t) - u_2(t) - u_3(t). \tag{2.1}$$

Валовый выпуск Y описывается некоторой производственной функцией

$$Y(t) = F(K(t), L(t)). \tag{2.2}$$

Выбор параметрического представления функции $F(K, L)$ является отдельной задачей эконометрического анализа.

Численность N населения экономического субъекта:

$$N(t) = P(t) + S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t). \tag{2.3}$$

Общий объём результативного труда L сформулирован в следующем виде:

$$L(t) = m \cdot (e_1 P(t) + e_2 S(t) + e_3 E(t) + e_4 R(t)), \tag{2.4}$$

где m — доля трудоспособного населения от общей численности населения; e_k — коэффициент продуктивности труда человека из соответствующей группы (P при $k = 1$; $S - k = 2$; $E - k = 3$; $R - k = 4$), измеряющийся в долях от продуктивности труда здорового человека.

Модель учитывает разрыв фазовых траекторий в случаях ввода и отмены ограничительных мер:

$$S(\tau_1+) = (1-a)S(\tau_1-), \quad P(\tau_1+) = P(\tau_1-) + aS(\tau_1-);$$

$$S(\tau_2+) = S(\tau_2-) + bP(\tau_2-), \quad P(\tau_2+) = (1-b)P(\tau_2-).$$

Пусть коэффициенты k_{ij} $(i, j \in [S, P, E, I, Q, R, D, V_1, \ldots, V_n])$ обозначают интенсивности перехода лиц из группы i в группу j, опишем дифференциальные связи модели:

$$\frac{dS}{dt} = k_{PS}P(t) + k_{RS}R(t-\tau) - \left(k_{SE}\left(I(t)\right) + k_{SP}(u_3(t)) - \rho\right)S(t); \quad (2.5)$$

$$\frac{dP}{dt} = k_{SP}(u_3(t))S(t) - k_{PS}P(t); \quad (2.6)$$

$$\frac{dE}{dt} = k_{SE}\left(I(t)\right)S(t) - k_{EI}E(t); \quad (2.7)$$

$$\frac{dI}{dt} = k_{EI}E(t) - (k_{IQ} + k_{IR} + k_{ID})I(t); \quad (2.8)$$

$$\frac{dQ}{dt} = k_{IQ}I(t) - (k_{QD} + k_{QR})Q(t); \quad (2.9)$$

$$\frac{dR}{dt} = k_{IR}I(t) + k_{QR}Q(t) - k_{RS}R(t); \quad (2.10)$$

$$\frac{dD}{dt} = k_{QD}Q(t) + k_{ID}I(t); \quad (2.11)$$

$$\frac{dZ}{dt} = g(u_2(t-\tilde{\tau})) - \mu Z(t) + ku_1(t). \quad (2.12)$$

Здесь Z — количество койко-мест в госпиталях для размещения заболевших; $\tilde{\tau}$ — лаг запаздывания при реализации инвестиций, направленных на строительство больниц.

Также в [4; 10] представлены алгебраические неравенства, задающие ограничение количества койко-мест:

$$Q(t) \leqslant Z(t) \quad (2.13)$$

и ограничения объёмов инвестиций:

$$u_i(t) \geqslant 0, \quad \int_{t_0}^{T} u_i(t)dt \leqslant B_i, \quad i = \overline{1,3}. \tag{2.14}$$

Здесь B_1 — объём бюджета на переоборудование существующих койко-мест; B_2 — на строительство новых больниц; B_3 — на информационную кампанию по борьбе с массовым заболеванием. Формально условие (2.14) позволяет использовать импульсные управляющие функции, что может привести к разрыву фазовой траектории. Однако инвестиции (управление) не могут быть сколь угодно большими, в каждый момент времени они ограничены финансовыми возможностями экономической системы. Пусть возможности не превышают константу M, тогда управления $u_i \leqslant M$, $i = \overline{1,3}$. В этом случае u_i $(i = \overline{1,3})$ можно считать кусочно-непрерывными функциями.

3. VSL-критерий

Данный критерий основан на использовании такой величины, как «ценность статистической жизни» (VSL).

Согласно одному из определений, значение VSL показывает, какую стоимость в среднем создаёт человек в течение жизни [1]. Иными словами, значение VSL напрямую зависит от среднедушевого объёма производства в денежном выражении (т. е. от ВВП или ВРП, в зависимости от масштаба объекта моделирования). В данной работе VSL будет вычисляться именно по такому принципу, поскольку модель [4;10] построена с «точки зрения» масштабной экономической системы. Очевидно, что для такой системы ценность жизни индивида определяется тем, какой вклад в её доход он вносит, т. е. его экономической эффективностью.

Введём $VSL_{mod}(t, T_1)$ – модифицированную «ценность статистической жизни». Она показывает ценность жизни человека, начавшего трудовую деятельность в момент времени t и проработавшего T_1 лет. Будем считать, что T_1 – средняя продолжительность трудового стажа в рассматриваемой экономической системе.

Рассмотрим формулу для вычисления VSL по среднедушевому ВВП [1], преобразовав её к следующему виду:

$$VSL_{mod}(t, T_1) = \int_{t}^{t+T_1} \frac{Y(s)}{N(s)}(1 + i(s))^{t-s}ds. \tag{3.1}$$

Здесь $\dfrac{Y(s)}{N(s)}$ — среднедушевой объём производства в единицу времени; i — годовая банковская процентная ставка. Валовый выпуск Y измеряется в денежных единицах.

Предположим, что к моменту времени t человек имеет трудовой стаж τ лет, $\tau \in [0; T_1]$, тогда $VSL_{mod}(t, T_1 - \tau)$ – доход, который принесёт экономической системе работающий человек за $(T_1 - \tau)$ лет, начиная с момента t. Введем $p(t, \tau)$ – долю трудоспособного населения, имеющего стаж работы τ в момент времени t: $\int_0^{T_1} p(t, \tau) d\tau = 1$.

В этом случае величина

$$C_1(t) = \int_0^{T_1} D(t) p(t, \tau) VSL_{mod}(t, T_1 - \tau) d\tau$$

означает недополученный доход экономической системы, обусловленный смертностью вследствие заболевания.

Некоторые заболевания сопровождаются осложнениями, вызывающими дальнейшие проблемы со здоровьем, и/или приводят к сокращению продолжительности жизни. Потенциальный трудовой стаж человека при этом также уменьшается. Обозначим величину сокращения через T_2. Тогда

$$C_2(t) = \int_{T_1 - T_2}^{T_1} (I(t) - D(t)) p(t, \tau) VSL_{mod}(t, T_1 - \tau) d\tau$$

означает недополученный доход экономической системы, обусловленный сокращением трудового стажа вследствие заболевания.

Также на недополученный доход влияет временная потеря человеком трудоспособности во время заболевания:

$$C_3(t) = (m \cdot N(t) - L(t)) \frac{Y(t)}{N(t)}.$$

Здесь $(m \cdot N(t) - L(t))$ – численность трудоспособных людей, которые временно не работают по причине болезни; $(m \cdot N(t) - L(t)) \dfrac{Y(t)}{N(t)}$ – оценка экономических потерь, обусловленных временной нетрудоспособностью заболевших.

Используя формулы (2.1), (3.1), соотношения (2.3), (2.4), запишем выражение для вычисления прибыли с учётом недополученного дохода:

$$\pi_{VSL}(t) = Y(t) - \sum_{i=1}^{3} u_i(t) - C_1(t) - C_2(t) - C_3(t). \tag{3.2}$$

Заметим, что соотношение (3.2) позволяет учесть как экономический, так и социальный аспект. Поставим задачу максимизации интегральной прибыли $\pi_{VSL}(t)$ на интервале планирования $[t_0; T]$:

$$J_{VSL}(u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2) = \int_{t_0}^{T} \pi_{VSL}(t) dt \to \max_{u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2}. \tag{3.3}$$

Решение задачи (3.3) с условиями (2.1)–(2.14) позволяет найти оптимальное решение двухкритериальной проблемы (максимизация прибыли, минимизация количества заболевших) путем преобразования к однокритериальной форме (3.3).

4. Свертка критериев

Другим подходом для разрешения проблемы при многокритериальной оптимизации является представление экономического и социального критериев в виде весовой суммы относительных безразмерных величин (долей).

Разделим текущую величину прибыли $\pi(t)$ на объём производства в момент начала эпидемии $Y(t_0)$, а текущее количество заболевших $E(t)$ – на численность населения в момент начала эпидемии $N(t_0)$. Делители выбраны таким образом, чтобы величины полученных долей на начальном этапе находились на отрезке $[0;1]$. Так как $Y(t_0)$ и $N(t_0)$ являются константами, это позволяет при делении пропорционально сократить масштаб значений компонент без смещения локальных экстремумов.

В этом случае получим функционал

$$J_{CONV} = \int_{t_0}^{T} \left(\alpha_1 \frac{\pi(t)}{Y(t_0)} - \alpha_2 \frac{E(t)}{N(t_0)} \right) dt \to \max_{u_1,u_2,u_3,\tau_1,\tau_2}, \qquad (4.1)$$

где $0 < \dfrac{\pi(t_0)}{Y(t_0)}, \dfrac{E(t_0)}{N(t_0)} \leqslant 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Для нахождения оптимума в задаче (2.1)–(2.14), (4.1) необходимо указать значения весовых параметров α_1, α_2.

5. Вычислительный эксперимент

В [4] описана методика оценки параметров модели (2.1)–(2.14) и вычислены их значения на основе статистических данных по России и Ульяновской области за 2020 г. Некоторые значения этих параметров были пересчитаны позднее с учетом обновлённой информации. Актуальные значения параметров представлены в табл. 1. Также в [4] получены оценки функциональных зависимостей между параметрами, результаты приведены в таблице 2.

При вычислении недополученного дохода $C_1(t)$, $C_2(t)$ требуется нахождение $VSL_{mod}(t, T_1 - \tau)$. Проведем оценку этой величины. Предположим, что $VSL_{mod}(t, T_1 - \tau)$ представляет собой дисконтированный суммарный доход для государства, который мог бы принести работающий человек при условии, что на момент времени t среднедушевой

ВВП $\dfrac{Y(t)}{N(t)}$ и банковская ставка $i(t)$ в будущем останутся без изменений. В этом случае

$$VSL_{mod}(t, T_1 - \tau) = \frac{Y(t)}{N(t)} \int_t^{t+T_1-\tau} (1+i(t))^{t-s} ds = \frac{Y(t)\left(1 - (1+i(t))^{\tau - T_1}\right)}{N(t)\ln(1+i(t))}.$$

Тогда

$$C_1(t) = \frac{D(t)Y(t)}{N(t)\ln(1+i(t))} \int_0^{T_1} p(t,\tau)\left(1 - (1+i(t))^{\tau - T_1}\right) d\tau,$$

$$C_2(t) = \frac{(I(t) - D(t))Y(t)}{N(t)\ln(1+i(t))} \int_{T_1 - T_2}^{T_1} p(t,\tau)\left(1 - (1+i(t))^{\tau - T_1}\right) d\tau.$$

Таблица 1

Значения параметров модели

Параметр	Регион: Россия	Регион: Ульяновская область	Параметр	Регион: Россия	Регион: Ульяновская область
a	$0,415$	$0,416$	b	$0,271$	$0,377$
k_{PS}	$0,64$	$0,5$	k_{QD}	$0,2573602$	$0,5083035$
k_{RS}	$0,0002$	$0,0002$	k_{IR}	$1,887451$	$2,536730$
k_{QR}	$7,990511$	$12,33356$	k_{ID}	0	0
k_{EI}	$2,222153$	$2,131188$	k_{IQ}	$5,220368$	$1,712176$
k	$3,415 \cdot 10^{-6}$	$2,719 \cdot 10^{-6}$	m	$0,482$	$0,467$
e_1	$0,879$	$0,879$	e_2	1	1
e_3	$0,43$	$0,43$	e_4	1	1
μ	$8,33 \cdot 10^{-3}$	$8,33 \cdot 10^{-3}$	ρ	$-9,516 \cdot 10^{-5}$	$-3,636 \cdot 10^{-3}$
$\tilde{\tau}$	0	0	B_1	$8,17 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^{7}$
B_2	$2,9 \cdot 10^{10}$	0	B_3	$5,02 \cdot 10^{8}$	$5,02 \cdot 10^{8}$

Для вычислительного эксперимента значения $p(t,\tau)$ были приняты постоянными, с условием нормировки $p(t,\tau) = 1/T_1$. В этом случае

$$C_1(t) = \frac{D(t)Y(t)}{N(t)\ln(1+i(t))}\left(1 + \frac{(1+i(t))^{-T_1} - 1}{T_1 \ln(1+i(t))}\right),$$

$$C_2(t) = \frac{(I(t) - D(t))Y(t)}{N(t)\ln(1+i(t))}\left(\frac{T_2}{T_1} + \frac{(1+i(t))^{-T_2} - 1}{T_1 \ln(1+i(t))}\right).$$

Таблица 2

Оценки функциональных зависимостей

Параметрическая функция	Регион	
	Россия	Ульяновская область
$k_{SE}(I)$	$1,096 \cdot 10^{-7} I$	$7,96 \cdot 10^{-6} I$
$k_{SP}(u_3)$	$0,174 + 1,845 \cdot 10^{-11} u_3$	$0,122 + 2,097 \cdot 10^{-11} u_3$
$g(u_2)$	$1,381 \cdot 10^{-7} u_2$	0
$F(K,L)$	$7,47 \cdot 10^{-5} K^{0,4387} L^{1,3667}$	$28,228 \cdot K^{0,3815} L^{0,5728}$
$K(t)$	$2,74632 \cdot 10^{14} \cdot e^{0,0102t}$	$1,256128 \cdot 10^{12} \cdot e^{0,01178t}$

Для решения задачи оптимального управления (2.1)–(2.14) с критерием (3.3) использовалось значение $T_1 = 34,5$ года – среднее для РФ [5]. В качестве $i(t)$ была взята ключевая ставка ЦБ России. На начало 2020 г. (с января по апрель) она составляла 6% [2]. Это оценка нижней границы значения i, поскольку на основе ключевой ставки коммерческие банки определяют свою ставку, которая превышает ключевую.

В силу сделанных предположений о допустимых управлениях и свойствах дифференциальных связей можно утверждать, что задача ОУ (2.1)–(2.14), (3.3) имеет точное решение на допустимом множестве или существует сходящаяся последовательность процессов, определенных на допустимом множестве. В свою очередь, управляющий орган экономической системы на практике принимает управление достаточно простой структуры. Это обусловлено механизмом выделения финансирования, контролем за исполнением расходов. Предположим, что инвестирование является постоянным в течение периода планирования. Это сужает класс допустимых управлений, и полученное решение может отличаться от решения в классе кусочно-непрерывных управлений.

Решение задачи (2.1)–(2.14), (3.3) находилось методом параметризации в классе постоянных управлений [3].

Отметим, что в Ульяновской области строительство больниц в период пандемии не проводилось, поэтому при проведении эксперимента на данных этого региона управление u_2 было исключено из модели.

Анализируя полученные оптимальные решения, можно отметить, что при учёте ценности статистической жизни для Ульяновской области важным фактором максимизации прибыли является введение ограничительных мер в момент начала эпидемии ($\tau_1 = 0$) на длительный срок ($\tau_2 = 6,49$ мес.). Противоположный результат наблюдается для России — срок ограничительных мер должен быть минимальным и составлять всего $\tau_2 = 0,14$ мес. ($\tau_1 = 0$). Можно предположить, что отличия в полученных стратегиях обусловлены различным влиянием фактора трудовых ресурсов на валовый выпуск: по стране оно в $2,4$ раза выше, чем по области. Введение ограничительных мер на длительный срок в России негативно отразилось бы на результативности труда, что, в свою очередь, привело бы к заметному снижению объёмов производства. Для Ульяновской области при этом экономические последствия ограничительных мер будут менее выраженными, поэтому для данного региона, напротив, предлагается стратегия поддержания таких мер на протяжении значительной части периода планирования.

Кроме того, расчёты показывают, что ни для России, ни для Ульяновской области не требуется проведение информационной кампании по борьбе с распространением заболевания ($u_3 = 0$). Для России спонсирование такой кампании повлекло бы увеличение количества людей, соблюдающих ограничительные меры. Это, как и законодательное введение ограничительных мер, рассмотренное выше, уменьшило бы результативность труда и повлияло на валовый выпуск. В свою очередь, для Ульяновской области финансовая поддержка информационной кампании не требуется, поскольку предполагается, что длительные ограничения, объявленные официально, будут достаточными.

Наконец, согласно результатам эксперимента, для России необходимы вложения в переоборудование существующих койко-мест в больницах, чтобы размещать заболевших: $u_1 = 1505,178$ млн руб. в месяц. Также можно заключить, что количества переоборудованных мест будет достаточно и возводить новые больницы не потребуется ($u_2 = 0$). В свою очередь, в Ульяновской области будет достаточно уже существующих койко-мест, вследствие чего не требуются затраты на их переоборудование ($u_1 = 0$).

Теперь рассмотрим задачу ОУ (2.1)–(2.14) с критерием (4.1). Решение находилось в классе постоянных управлений методом параметризации [3]. В табл. 3 приведены оптимальные стратегии для России при различных α_1, α_2. Для РФ в поведении оптимального решения наблюдаются следующие закономерности:

1. С увеличением веса социальной компоненты уменьшаются затраты на переоборудование койко-мест и строительство больниц; при этом увеличивается длительность ограничительных мер. Исключение здесь составляют случаи, когда вес экономической и социальной компонент является близким ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$; $\alpha_1 = 0,6$, $\alpha_2 = 0,4$); здесь длительность ограничительных мер составляет чуть менее месяца в начале периода планирования.
2. В случае, когда вес экономической компоненты более 80% ($\alpha_1 \geqslant 0,8$), вкладываются значительные средства в переоборудование койко-мест, строительство больниц, информационную кампанию. При этом ограничительные меры нужно вводить ближе к концу первого месяца, отменять меры после окончания второго месяца. Такое решение близко к тому, что было реализовано в России в период пандемии 2020 г. ($\tau_1 = 0,5$, $\tau_2 = 2,5$).

3. При значении веса экономической компоненты 65–80% уменьшение ее веса ведет к увеличению длительности ограничительных мер практически на весь период планирования; к сокращению затрат на переоборудование койко-мест, строительство больниц, информационную кампанию.
4. При близких значениях веса экономической и социальной компоненты ($0,5 \leqslant \alpha_1 \leqslant 0,6$) оптимальное решение в наибольшей степени соответствует решению, полученному с помощью VSL-критерия: затраты на переоборудование койко-мест поддерживаются на некотором уровне; затраты на строительство больниц и информационную кампанию практически равны нулю; длительность ограничительных мер составляет менее месяца с начала периода планирования.
5. В случае преобладания веса социальной компоненты над экономической ($\alpha_2 \geqslant 0,7$): затраты на переоборудование койко-мест, строительство больниц обнуляются; длительность ограничительных мер растет с увеличением веса социальной компоненты и при $\alpha_2 = 1$ распространяется на весь период планирования; если $\alpha_2 \geqslant 0,8$, то требуются максимальные вложения в информационную кампанию.

Таблица 3

Оптимальные решения для России

	Параметры управления				
Вес критериев	u_1, млн руб/ мес.	u_2, млн руб/ мес.	u_3, млн руб/ мес.	τ_1, мес.	τ_2, мес.
$\alpha_1 = 1,0$; $\alpha_2 = 0,0$	$7247,645$	$2567,461$	$44,53266$	$0,86$	$2,07$
$\alpha_1 = 0,9$; $\alpha_2 = 0,1$	$7247,645$	$2567,461$	$44,53266$	$0,86$	$2,07$
$\alpha_1 = 0,8$; $\alpha_2 = 0,2$	$7247,645$	$2567,461$	$44,53266$	$0,86$	$2,07$
$\alpha_1 = 0,75$; $\alpha_2 = 0,25$	$6280,311$	$1368,244$	$23,73222$	$1,34$	$8,05$
$\alpha_1 = 0,7$; $\alpha_2 = 0,3$	$6077,355$	$712,1869$	$13,69642$	$1,13$	$8,31$
$\alpha_1 = 0,65$; $\alpha_2 = 0,35$	$3704,039$	$19,82288$	$8,34577$	0	$7,94$
$\alpha_1 = 0,6$; $\alpha_2 = 0,4$	$498,7971$	$0,23730$	$0,17861$	0	$0,96$
$\alpha_1 = 0,5$; $\alpha_2 = 0,5$	$498,7971$	$0,93368$	$0,46104$	0	$0,96$
$\alpha_1 = 0,4$; $\alpha_2 = 0,6$	$43,72145$	$0,15886$	0	0	$6,97$
$\alpha_1 = 0,3$; $\alpha_2 = 0,7$	0	0	0	0	$8,02$
$\alpha_1 = 0,25$; $\alpha_2 = 0,75$	0	0	0	0	$8,39$
$\alpha_1 = 0,2$; $\alpha_2 = 0,8$	0	0	$52,8421$	0	$8,67$
$\alpha_1 = 0,1$; $\alpha_2 = 0,9$	0	0	$52,8421$	0	$9,16$
$\alpha_1 = 0,0$; $\alpha_2 = 1,0$	0	0	$52,8421$	0	$9,5$

Для Ульяновской области практически все стратегии носят общий характер: введение ограничительных мер с самого начала массового заболевания, $\tau_1 = 0$; отказ от информационной кампании, $u_3 = 0$; отказ от затрат на переоборудование койко-мест, $u_1 = 0$. При этом с увеличением веса социальной компоненты увеличивается длительность ограничительных мер ($\alpha_1 = 1,0, \tau_2 = 0,18$; $\alpha_1 = 0,9, \tau_2 = 0,25$; $\alpha_1 = 0,8, \tau_2 = 0,59$; $\alpha_1 = 0,7, \tau_2 = 1,68$; $\alpha_1 = 0,65, \tau_2 = 6,99$; $\alpha_1 = 0,6, \tau_2 = 7,39$; $\alpha_1 = 0,5, \tau_2 = 8,02$; $\alpha_1 = 0,4, \tau_2 = 8,62$; $\alpha_1 = 0,3, \tau_2 = 8,94$; $\alpha_1 = 0,2, \tau_2 = 9,01$; $\alpha_1 = 0,1, \tau_2 = 9,48$; $\alpha_1 = 0,0, \tau_2 = 9,5$). Если вес социальной компоненты менее 30 %, то ограничительные меры снимаются менее чем через 2 мес. При значении веса более 35 % сохранять ограничительные меры в течение более 7 мес., при $\alpha_2 = 1$ на протяжении всего моделируемого периода. Оптимальное решение, полученное при $\alpha_1 = 0,65$, $\alpha_2 = 0,35$, в наибольшей степени соответствует решению, полученному с помощью VSL-критерия.

6. Заключение

В работе развивается модель управления экономической системой в условиях массового заболевания. Модель включает одновременно социально-биологические и экономические факторы. В рамках исследования предлагаются различные подходы к решению проблемы одновременного учета несогласованных (или слабосогласованных) критериев оценки оптимальности управляющих стратегий.

С помощью метода параметризации получены оптимальные стратегии управления для экономик Российской Федерации и Ульяновской области в условиях пандемии с различными критериями качества. Проведён сравнительный анализ полученных стратегий. Можно отметить, что стратегия, реализованная в России в период пандемии 2020 г., в большей мере соответствует экономическому критерию, нежели социальному. Также при сравнении критерия свертки и VSL-критерия можно сделать вывод, что VSL-критерий соответствует критерию свертки при значимости экономической компоненты на уровне 60–65%.

Дальнейшие исследования могут быть продолжены в направлении включения в модель фактора вакцинации и развития метода параметризации для разрывных фазовых траекторий.

Список источников

1. Быков А. А. О методологии экономической оценки жизни среднестатистического человека (пояснительная записка) // Проблемы анализа риска. 2007. Т. 4, № 2. С. 178–191.

2. Ключевая ставка Банка России // Банк России.
URL: https://www.cbr.ru/hd_base/KeyRate/ (дата обращения: 19.03.2023).
3. Лутошкин И. В. Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2011. Т. 4, № 1. С. 44–56.
4. Лутошкин И. В., Рыбина М. С. Моделирование управления экономикой региона в условиях массовых заболеваний // Экономика региона. 2023. Т. 19, № 2. С. 299–313. https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2023-2-1
5. Средний трудовой стаж в РФ при выходе на пенсию составляет 34,5 года // РИА Новости. URL: https://ria.ru/20131119/977986173.html (дата обращения 19.01.2023).
6. Application of the ARIMA model on the COVID-2019 epidemic dataset / D. Benvenuto, M. Giovanetti, L. Vassallo [et al.] // Data in Brief. 2020. Vol. 29. https://doi.org/10.1016/j.dib.2020.105340
7. *Gomez M. C., Rubio F. A., Mondragon E. I.* Qualitative analysis of generalized multistage epidemic model with immigration // Mathematical Biosciences and Engineering. 2023. Vol. 20, Iss. 9. P. 15765–15780.
https://doi.org/10.3934/mbe.2023702
8. Brauer F., Castillo-Chavez C. Mathematical models in population biology and epidemiology. 2012. Vol. 40. New York : Springer, 2012. 508 p.
9. *Luebben G., Gonzalez-Parra G., Cervantes B.* Study of optimal vaccination strategies for early COVID-19 pandemic using an age-structured mathematical model: A case study of the USA // Mathematical Biosciences and Engineering. 2023. Vol. 20,Iss. 6. P. 10828–10865. https://doi.org/10.3934/mbe.2023481
10. Lutoshkin I. V., Rybina M. S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 264–273. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273
11. Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases: Models, Methods and Theory / eds. Castillo-Chavez C., S. Blower P. van den Driessche, D. Kirschner, A. A. Yakubu. New York : Springer, 2002. 377 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0065-6
12. Modeling epidemics: A primer and Numerus Model Builder implementation / W. M. Getz, R. Salter, O. Muellerklein [et al.] // Epidemics. 2018. Vol. 25. P. 9–19. https://doi.org/10.1016/j.epidem.2018.06.001
13. Ovsyannikova N. I. Problem of optimal control of epidemic in view of latent period // Civil Aviation High Technologies. 2017. Vol. 20, N 2. P. 144–152.
14. Siettos C. I., Russo L. Mathematical modeling of infectious disease dynamics // Virulence. Taylor and Francis Inc. 2013. Vol. 4, N 4. P. 295–306.

References

1. Bykov A.A. On Methodology for Economic Assessment of the Value of Statistical Life (Explanatory Note). *Issues of Risk Analysis*, 2007, vol. 4, no. 2, pp. 178–191. (in Russian)
2. *Kljuchevaja stavka Banka Rossii* [Bank of Russia key rate]. *Bank of Russia*. Available at: https://www.cbr.ru/hd_base/KeyRate/ (accessed 19.03.2023). (in Russian)

3. Lutoshkin I.V. The parameterization method for optimizing the systems which have integro-differential equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 44–56.
4. Lutoshkin I.V., Rybina M.S. Modelling of Regional Economic Management in Conditions of Mass Diseases. *Economy of regions*, 2023, vol. 19, no. 2, pp. 299–313. https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2023-2-1 (in Russian)
5. *Srednij trudovoj stazh v RF pri vyhode na pensiju sostavljaet 34,5 goda* [The average length of service in the Russian Federation upon retirement is 34.5 years]. *RIA Novosti* [RIA News]. Available at: https://ria.ru/20131119/977986173.html (accessed 19.01.2023). (in Russian)
6. Benvenuto D., Giovanetti M., Vassallo L. et al. Application of the ARIMA model on the COVID-2019 epidemic dataset. *Data in Brief*, 2020, vol. 29. https://doi.org/10.1016/j.dib.2020.105340
7. Gomez M.C., Rubio F.A., Mondragon E.I. Qualitative analysis of generalized multistage epidemic model with immigration. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2023, vol. 20, iss. 9, pp. 15765–15780. https://doi.org/10.3934/mbe.2023702
8. Brauer F., Castillo-Chavez C. *Mathematical models in population biology and epidemiology.* New York, Springer, 2012, , vol. 40, 508 p.
9. Luebben G., Gonzalez-Parra G., Cervantes B. Study of optimal vaccination strategies for early COVID-19 pandemic using an age-structured mathematical model: A case study of the USA. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2023, vol. 20, iss. 6, pp. 10828–10865. https://doi.org/10.3934/mbe.2023481
10. Lutoshkin I.V., Rybina M.S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, no. 2, pp. 264–273. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273
11. *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases: Models, Methods and Theory.* Edited by Castillo-Chavez C. with S. Blower P. van den Driessche, D. Kirschner, A. A. Yakubu. New York, Springer, 2002, 377 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0065-6
12. Getz W.M., Salter R., Muellerklein O. et al. Modeling epidemics: A primer and Numerus Model Builder implementation. *Epidemics*, 2018, vol. 25, pp. 9–19. https://doi.org/10.1016/j.epidem.2018.06.001
13. Ovsyannikova N.I. Problem of optimal control of epidemic in view of latent period. *Civil Aviation High Technologies*, 2017, vol. 20, no. 2, pp. 144–152.
14. Siettos C.I., Russo L. Mathematical modeling of infectious disease dynamics. *Virulence. Taylor and Francis Inc,* 2013, vol. 4, no. 4, pp. 295–306.

Об авторах

Лутошкин Игорь Викторович, канд. физ.-мат. наук, доц., Ульяновский государственный университет, Ульяновск, 432017, Российская Федерация, lutoshkiniv@ulsu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4108-7646

About the authors

Igor V. Lutoshkin, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation, lutoshkiniv@ulsu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4108-7646

Рыбина Мария Сергеевна, Ульяновский государственный университет, Ульяновск, 432017, Российская Федерация, rybina_maria@icloud.com, https://orcid.org/0009-0002-4049-751X

Maria S. Rybina, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation, rybina_maria@icloud.com, https://orcid.org/0009-0002-4049-751X

Поступила в редакцию / Received 15.01.2024
Поступила после рецензирования / Revised 07.03.2024
Принята к публикации / Accepted 12.03.2024