



Серия «Математика»

2021. Т. 35. С. 49–59

Онлайн-доступ к журналу:

<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 519.6

MSC 65Z05

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.49>

Построение областей устойчивости в пространстве параметров в ловушке Пеннинга с вращающимся электрическим полем

А. Д. Овсянников¹, А. И. Шлокова¹, А. А. Комарова¹

¹ *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация*

Аннотация. Рассматривается динамика частиц в ловушке Пеннинга с вращающимся дипольным электрическим полем и буферным газом. Произведен переход к системе координат, вращающейся вместе с электрическим полем, позволяющий свести исследуемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами к линейной дифференциальной системе с постоянной матрицей. Используя одну из модификаций критерия устойчивости Гурвица – критерий Льенара – Шипара, проведен анализ устойчивости (по Ляпунову) движений частиц в ловушке и найдены области устойчивости в пространстве параметров ловушки. Расчеты проводились для ловушки с “типовыми” основными параметрами. Наибольшая степень устойчивости была получена на частотах вращения поля близких к “резонансным”. Небольшие относительные отклонения от этих частот приводили к существенному уменьшению степени устойчивости и потере устойчивости при “малых” значениях амплитуды вращающегося поля. Здесь было возможно частично компенсировать это увеличением амплитуды вращающегося поля, но лишь до определенных пределов, после которых устойчивость снова терялась.

Ключевые слова: ловушка Пеннинга, вращающаяся стенка, ловушка Пеннинга – Малмберга – Сурко, динамика заряженных частиц, устойчивость.

1. Введение

Правильно подобранная комбинация постоянных полей (электростатического аксиально симметрического поля электродов ловушки и про-

дольного однородного магнитного поля) позволяет ловушке Пеннинга создать устойчивую систему, в которой частицы колеблются вокруг положения равновесия. Эти колебания подразделяются на три типа: циклотронные, магнетронные и аксиальные.

Добавление в ловушку буферного газа приводит к затуханию циклотронных и аксиальных колебаний, но при этом и к медленному росту амплитуды магнетронных колебаний (т. е. к неустойчивости).

В данной работе рассматривается динамика заряженных частиц в ловушке Пеннинга с вращающимся дипольным электрическим полем и буферным газом, исследованная ранее в [9-11]. Поля рассматриваемой идеальной ловушки комбинируются из постоянных полей ловушки Пеннинга и переменного (вращающегося в поперечной плоскости по всей длине ловушки) электрического поля, называемого также «вращающейся стенкой» (Rotating Wall – RW). Такую модификацию ловушки иногда называют ловушкой Чарльтона. Заметим также, что исследуемая модель движения может быть использована при анализе ловушки Пеннинга – Малмберга – Сурко – открытой ловушке цилиндрической формы и ее модификаций [2].

Добавление в ловушку вращающегося электрического поля с соответствующими параметрами позволяет получить и затухание всех типов колебаний (асимптотическую устойчивость), и, напротив, быстрое увеличение показателя роста амплитуды магнетронных колебаний (неустойчивость). Однако результаты анализа влияния вращающегося поля, полученные ранее, были или недостаточно строги с математической точки зрения [9; 10], или были недостаточно полны [11]. В работах [3; 4; 6; 12] были предложены общие подходы, применимые для анализа устойчивости и построения численно-аналитических решений уравнений движения исследуемой системы при произвольных значениях ее параметров.

Целью данной работы является установление аналитических критериев, которым должны удовлетворять параметры ловушки исследуемого типа для получения степени устойчивости исследуемой системы в заданном диапазоне (для анализа и настройки соответствующих режимов ее работы: сжатия или расширения). Следует отметить, что в работе исследуется движение одиночных частиц без учета влияния пространственного заряда сгустка накопленных частиц в идеальных (линейных) полях. Интерес к такой постановке задачи возникает из попыток [2; 9] объяснить наблюдаемый в экспериментах [10] эффект сжатия сгустка накопленных частиц вращающимся полем при предельно малых концентрациях накопленных частиц. Фокусирующий эффект в таком случае должен следовать из анализа решения уравнений движения одиночных частиц в полях сил, действующих в ловушке [2], возможность чего была показана в [3; 6].

2. Постановка задачи

Исследуется динамика заряженных частиц в ловушке Пеннинга с вращающимся дипольным электрическим полем. Следуя [10] запишем потенциал электрического поля ловушки в следующем виде:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{m}{q} \frac{w_z^2}{2} \left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \frac{m}{q} az(x \cos(w_r t) - y \sin(w_r t)). \quad (2.1)$$

Здесь m и q — масса и заряд частицы; w_z — частота продольных колебаний частицы в аксиально симметричном электрическом поле; a и w_r — амплитуда и частота вращающегося поля ($a = 0$ — поле выключено); $a \approx \frac{qU_r}{2mRL}$, где U_r — максимум разности потенциалов между диаметрально противоположными электродами, $2L$ — длина участка дипольно вращающегося поля, R — радиус цилиндрических электродов.

Динамика частиц моделируется следующей системой уравнений [10]:

$$\ddot{x} = \frac{w_z^2}{2} x - az \cos(w_r t) + \Omega_c \dot{y} - k \dot{x}, \quad (2.2)$$

$$\ddot{y} = \frac{w_z^2}{2} y + az \sin(w_r t) - \Omega_c \dot{x} - k \dot{y}, \quad (2.3)$$

$$\ddot{z} = -w_z^2 z - k \dot{z} - a(x \cos(w_r t) - y \sin(w_r t)). \quad (2.4)$$

Здесь $\Omega_c = qB/m$ — циклотронная частота в идеальной ловушке; $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B$ — магнитная индукция продольного однородного магнитного поля; $k > 0$ — коэффициент демпфирования, используемый для приближенного учета охлаждающего эффекта буферного газа с помощью силы вязкого сопротивления (трения) [9; 10]. Данная модель не учитывает статистический характер столкновений частиц с молекулами буферного газа. (При этом $k = 0$ означает ловушку без буферного газа.)

Будем предполагать выполнение следующих оценок:

$$\Omega_c \gg w_z \gg \frac{w_z^2}{2\Omega_c} \gg k > 0. \quad (2.5)$$

При $a = 0$ система уравнений является линейной стационарной системой уравнений, для которых легко найти характеристические числа $\lambda_{1,2} = \lambda_{\pm}$, $\lambda_{3,4} = \bar{\lambda}_{\pm}$, $\lambda_{5,6} = \mu_{\pm}$, от значения которых зависит характер поведения решений:

$$\lambda_+ = r_c - iw_c, \quad (2.6)$$

$$\lambda_- = r_m - iw_m, \quad (2.7)$$

$$\mu_{\pm} = -\frac{k}{2} \pm iw_b, \quad (2.8)$$

где $r_c = \text{Re}\lambda_+ = -(k + r_m)$; $r_m = \text{Re}\lambda_-$; w_m — модифицированная частота магнетронных колебаний, описывающая колебания частиц в

скрещенных продольном магнитном и радиальном электрическом полях; $w_c = (\Omega_c - w_m)$ — модифицированная частота циклотронных колебаний; $w_b = \sqrt{w_z^2 - \frac{k^2}{4}}$ — модифицированная частота продольных (аксиальных) колебаний. При этом будут справедливы приближенные формулы:

$$w_m \approx \frac{w_z^2}{\Omega_c}, r_m \approx \frac{k w_m}{\Omega_c} \ll k, w_b \approx w_z, w_c \approx \Omega_c. \quad (2.9)$$

Мнимые части характеристических чисел определяют модифицированные частоты колебаний. От отрицательных вещественных частей этих корней зависят коэффициенты сжатия амплитуды колебаний соответствующих типов движения, от положительных — коэффициенты расширения. Таким образом, при $k > 0$ и $a = 0$ для циклотронных и аксиальных движений имеет место сжатие (затухание амплитуды колебаний), а для магнетронных — расширение (нарастание амплитуды колебаний).

Для исследования устойчивости движения при произвольном значении параметра a введем новые переменные по формуле

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(w_r t) & -\sin(w_r t) \\ \sin(w_r t) & \cos(w_r t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

которая осуществляет переход к подвижной системе координат, получаемой из неподвижной равномерным вращением в поперечной плоскости с угловой частотой w_r вокруг оси z . Легко заметить, что переход к этим переменным не меняет характеристические показатели системы, и исследование устойчивости первоначальной системы можно свести к исследованию получаемой в результате введенной замены стационарной системы уравнений [3]:

$$\ddot{u} - (\Omega_c - 2w_r)\dot{v} + k\dot{u} + (w_r\Omega - w_r^2 - \frac{w_z^2}{2})u + kw_r v + az = 0, \quad (2.11)$$

$$\ddot{v} + (\Omega_c - 2w_r)\dot{u} + k\dot{v} + (w_r\Omega_c - w_r^2 - \frac{w_z^2}{2})v - kw_r u = 0, \quad (2.12)$$

$$\ddot{z} + k\dot{z} + w_z^2 z = -au. \quad (2.13)$$

Заметим, что ранее с помощью замены переменных (2.10) в работе [8] исследовалось влияние на устойчивость вращающегося квадрупольного электрического поля в ловушке Пеннинга без буферного газа. В таком случае проведение анализа устойчивости системы также существенно упрощается возможностью рассматривать поперечное движение независимо от продольного (в отличие от нашего случая).

Характеристические числа системы (2.11)-(2.13) могут быть найдены как корни характеристического полинома $\chi(\lambda)$, который может быть

удобно представлен в виде определителя [3]:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + k\lambda + (w_r\Omega_c - w_r^2 - \frac{w_z^2}{2}) & -(\Omega_c - 2w_r)\lambda + kw_r & a \\ (\Omega_c - 2w_r)\lambda - kw_r & \lambda^2 + k\lambda + (w_r\Omega_c - w_r^2 - \frac{w_z^2}{2}) & 0 \\ a & 0 & \lambda^2 + k\lambda + w_z^2 \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Расстояние на комплексной плоскости от мнимой оси до характеристического числа с максимальной вещественной частью, взятое с соответствующим знаком, будем называть степенью устойчивости и обозначать γ . Степень устойчивости будет браться с положительным знаком, если все корни характеристического полинома находятся в левой полуплоскости (случай асимптотической устойчивости системы). Если в правой полуплоскости находится хотя бы один корень, значение степени устойчивости будет браться с отрицательным знаком (случай неустойчивой системы). Если самый правый корень (или корни) располагаются на мнимой оси, степень устойчивости равна нулю. Как было показано ранее [4] степень устойчивости исследуемой системы не может превышать $\gamma_{max} = k/2$.

3. Построение области устойчивости

Введем параметр α , с помощью которого будем оценивать степень устойчивости исследуемой системы. Пусть $\mu = \lambda + \alpha$. Сделаем соответствующую замену в характеристическом полиноме (2.14):

$$\chi(\mu - \alpha) = d_0\mu^6 + d_1\mu^5 + d_2\mu^4 + d_3\mu^3 + d_4\mu^2 + d_5\mu + d_6. \quad (3.1)$$

Здесь $d_0 = 1$, $d_1 = (3k - 6\alpha)$, $d_2 = 3k^2 + w_r^2 + (\Omega_c - w_r)^2 + 15\alpha^2 - 15k\alpha$ и т. д. Коэффициенты d_j могут быть также вычислены из формулы Тейлора: $d_j = \chi^{(6-j)}(-\alpha)/(6-j)!$; $j = 0, \dots, 6$.

Проверку полинома (3.1) на асимптотическую устойчивость при различных значениях параметра α можно организовать с помощью необходимых и достаточных условий Рауса – Гурвица. Выполнение этих условий для полинома (3.1) при выбранном значении параметра α будет означать, что степень устойчивости полинома (2.14) будет больше выбранного значения: $\gamma > \alpha$.

Составим матрицу Гурвица для полинома (3.1)

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & 0 & 0 \\ d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 \\ 0 & d_6 & d_5 & d_4 & d_3 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_6 & d_5 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Так как характеристический полином системы имеет шестой порядок, целесообразно применять одну из модификаций алгебраического критерия устойчивости Гурвица — критерий Льенара – Шипара, который сводится к проверке положительности нечетных главных миноров матрицы Гурвица при условии $d_j > 0, j = 0, \dots, 6$.

Рассмотрим главные миноры матрицы Гурвица с нечетными индексами:

$$\Delta_1 = d_1; \Delta_3 = \begin{vmatrix} d_1 & d_0 & 0 \\ d_3 & d_2 & d_1 \\ d_5 & d_4 & d_3 \end{vmatrix}; \Delta_5 = \begin{vmatrix} d_1 & d_0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & 0 \\ d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 \\ 0 & d_6 & d_5 & d_4 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_6 & d_5 \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

В итоге получаем систему неравенств

$$\Delta_3 > 0; \Delta_5 > 0; d_j > 0, j = 1, \dots, 6, \quad (3.4)$$

выполнение которых гарантирует, что степень устойчивости γ полинома (2.14) будет лежать в диапазоне:

$$\alpha < \gamma \leq k/2. \quad (3.5)$$

Выбирая различные значения параметра α , исследуем численно зави-

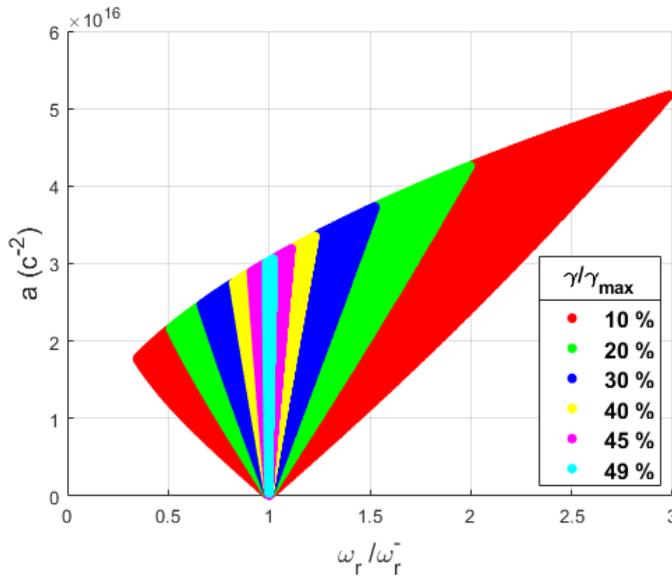


Рис. 1. Области с различными диапазонами значений степени устойчивости системы

симость степени устойчивости системы γ от амплитуды a и частоты

w_r вращающегося электрического поля. При этом основные параметры системы берутся со следующими значениями: $k = 1400(c^{-1})$, $w_z = 59.6 \cdot 10^6$ (рад/с), $\Omega_c = 4.4 \cdot 10^9$ (рад/с). В качестве заряженной частицы берется электрон.

На рисунках 1 и 2 различными цветами помечены найденные области асимптотической устойчивости в пространстве параметров a и w_r с оценкой диапазона значений для степени устойчивости системы. Например, красный цвет означает, что степень устойчивости составляет больше 10 процентов, зеленый — больше 20, и т. д. (см. легенду соответствующего рисунка), где за 100 процентов берется $\gamma_{max} = k/2$.

На рисунке 1 представлены результаты расчетов, которые проводились для частот вращающегося поля w_r от нуля до $3 * \omega_r^-$, где $\omega_r^- = (\omega_b + \omega_m) = 60 * 10^6$ (рад/с) — так называемая эффективная для сжатия частота вращения для данной системы (см. [4], [9]). Амплитуда вращающегося поля a бралась в диапазоне от нуля до $6 * 10^{16}(e^{-2})$. По горизонтальной оси для большей наглядности на Рис.1 откладывается отношение ω_r/ω_r^- . Следует отметить, что и при $a = 0$, и $w_r = 0$ система всегда неустойчива, поэтому на рис.1 построенная (найденная) область устойчивости хотя визуально (из-за масштаба) и кажется касающейся оси абсцисс, однако в действительности лежит выше.

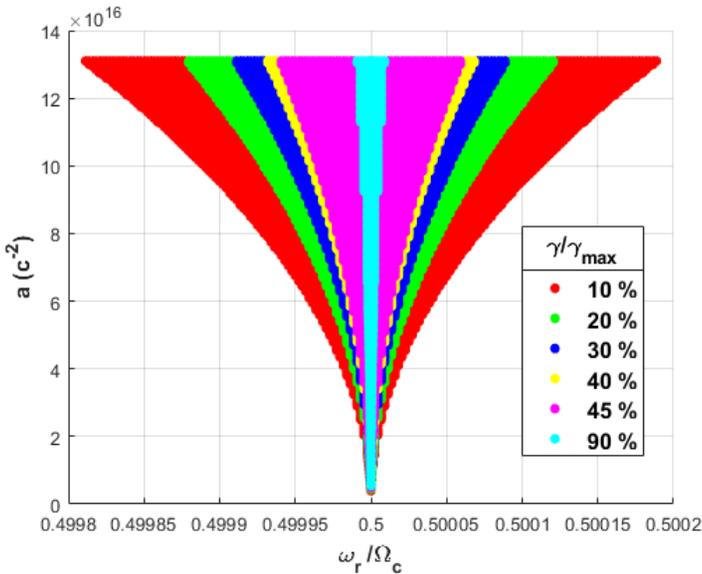


Рис. 2. Области с различными диапазонами значений степени устойчивости системы

На рисунке 2 представлены результаты расчетов, которые проводились для диапазона частот вращающегося поля $w_r = (\omega_c + \omega_m)/2 \pm 0.04\% = \Omega_c/2 \pm 0.04\%$. Амплитуда вращающегося поля a бралась в

диапазоне от нуля до $14 \cdot 10^{16} (c^{-2})$. По горизонтальной оси для удобства откладывается отношение ω_r / Ω_c .

В области устойчивости на рис. 1 наибольшие найденные степени устойчивости близки к $k/4$, а на рис. 2 наибольшие значения близки к $k/2$. Наибольшая степень устойчивости достигается на частотах вращения поля близких к “резонансным”, даже небольшие относительные отклонения от которых приводят к существенному уменьшению степени устойчивости и потере устойчивости при “небольших” значениях амплитуды вращающегося поля. Частично это может компенсироваться увеличением амплитуды вращающегося поля, но лишь до определенных пределов, после которых устойчивость теряется.

4. Заключение

Рассмотрена линейная модель динамики частиц в ловушке Пеннинга с вращающимся дипольным электрическим полем. Произведен переход к системе координат, вращающейся вместе с дипольным электрическим полем, позволяющий свести исследуемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами к линейной дифференциальной системе с постоянной матрицей коэффициентов. Используя одну из модификаций алгебраического критерия устойчивости Гурвица — критерий Льенара — Шипара, произведен анализ устойчивости (по Ляпунову) движений частиц в ловушке с типовыми основными параметрами, найдены области устойчивости в пространстве параметров, характеризующих добавочное вращающееся электрическое поле.

Характер поведения степени сжатия (степени устойчивости), полученный в результате вычислений, хорошо согласуется с данными [2; 9; 10]. Найденные наибольшие значения степени устойчивости находятся в узком диапазоне частот вращающегося поля, соответствующим эффективным значениям. Разработанный подход может использоваться для проверки эффективности сочетаний основных параметров ловушки для достижения желаемого воздействия вращающегося поля на режим накопления.

Заметим, что степень устойчивости системы не может быть единственным критерием качества динамики пучка частиц в ловушке конечных размеров. Она дает только асимптотическую оценку степени сжатия или расширения пучка частиц. Представляется интересным оценивать с использованием рассматриваемой модели динамики размеры накапливаемого сгустка частиц, например, с использованием так называемых огибающих [4]. Следует также отметить, что для оптимизации динамики частиц в ловушке и выбора ее параметров с учетом раз-

личных критериев могут быть использованы математические модели и методы, описанные, например в [1; 5; 7].

Список литературы

1. Владимирова Л. В. Многокритериальная оптимизация динамики пучков // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2014. Т. 7. С. 3–18.
2. Есеев М. К., Мешков И. Н. Ловушки для накопления заряженных частиц и античастиц в прецизионных экспериментах // Успехи физических наук. 2016. Т. 186, № 3. С. 321–335. <https://doi.org/10.3367/UFN.0186.201603f.0321>
3. Исследование устойчивости динамики заряженных частиц в ловушке Пеннинга – Малмберга – Сурко с вращающимся полем / И. Н. Мешков, А. Д. Овсянников, Д. А. Овсянников, М. К. Есеев // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476, № 6. С. 630–634. <https://doi.org/10.7868/S0869565217300065>
4. Овсянников А.Д. Анализ динамики заряженных частиц в идеальной ловушке Пеннинга с вращающимся полем и буферным газом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10, Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2019. Т. 15, № 1. С. 62–75. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.105>
5. Овсянников А. Д. Математические модели оптимизации динамики пучков. СПб. : ВВМ, 2014. 181 с.
6. Овсянников А. Д., Райконен М. А. Алгоритм приближенного расчета мультипликаторов для одной периодической системы // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1, Естественные и технические науки. 2017. Вып. 3. С. 10–14.
7. Овсянников Д.А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л. : Изд-во ЛГУ, 1990. 312 с.
8. Hasegawa T., Jensen M. J., Bollinger J. J. Stability of a Penning trap with a quadrupole rotating field // Phys. Rev. A 71, 023406. 2005. Vol. 71, Iss. 2. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.023406>
9. Isaac C. A. Motional sideband excitation using rotating electric fields // Phys. Rev. A 87, 043415. 2013. Vol. 87, Iss.4 <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.043415>
10. Compression of positron clouds in the independent particle regime / C. A. Isaac [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 107, Iss. 3. 033201 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.033201>
11. Analysis of the particle dynamics stability in the Penning–Malmberg–Surko trap / I. N. Meshkov [et al.] // Proc. XXV Russian Particle Accelerator Conference, RuPAC 2016. Saint Petersburg, 2016. P. 64–66. <https://doi.org/10.18429/JACoW-RuPAC2016-WECAMH03>
12. Analysis and Modeling of the Charged Particle Beam Dynamics in the Charlton Trap / A. D. Ovsyannikov [et al.] // Phys. Part. Nuclei Lett. 2018. Vol. 15. P. 754–757. <https://doi.org/10.1134/S1547477118070543>

Александр Дмитриевич Овсянников, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологии программирования, факультет прикладной математики — процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034,

г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9,
email: a.ovsyannikov@spbu.ru, ovs74@mail.ru

Анна Ильинична Шлокова, студентка 4-го курса бакалавриата, факультет прикладной математики — процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9,
email: st062298@student.spbu.ru

Алена Алексеена Комарова, студентка 4-го курса бакалавриата, Факультет прикладной математики — процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9,
email: st062167@student.spbu.ru

Поступила в редакцию 30.12.2020

Construction of Stability Regions in the Parameter Space in a Penning Trap with a Rotating Electric Field

A. D. Ovsyannikov¹, A. I. Shloкова¹, A. A. Komarova¹

¹ *Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russian Federation*

Abstract. The dynamics of particles in a Penning trap with a rotating dipole electric field and a buffer gas is considered. A transition is made to a coordinate system that rotates together with the electric field, which makes it possible to reduce the system of ordinary differential equations with periodic coefficients to a linear differential system with a constant matrix. Using one of the modifications of the Hurwitz stability criterion—the Lienard-Chipart criterion, the stability analysis (according to Lyapunov) of particle motions in the trap is carried out and the stability regions in the trap parameter space are found. Calculations were carried out for a trap with “typical” main parameters. The biggest degree of stability was obtained at frequencies of rotation of the field close to “resonant”. Small relative deviations from these frequencies led to a significant decrease in the degree of stability and loss of stability at “small” values of the amplitude of the rotating field. At the same time, it was possible to partially compensate this by increasing the amplitude of the rotating field, but only to certain limits, after which stability was again lost.

Keywords: Penning trap, rotating wall, Penning-Malmberg-Surko trap, charged particle dynamics, stability.

References

1. Vladimirova L. Multicriteria Optimization of Beam Dynamics. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2014, vol. 7, pp. 3–18. (in Russian)
2. Eseev M.K., Meshkov I.N. Traps for storing charged particles and antiparticles in high precision experiments. *Physics-Uspokhi*, 2016, vol. 59, no. 3, pp. 304–317. <https://doi.org/10.3367/UFNe.0186.201603f.0321>
3. Meshkov I.N., Ovsyannikov A.D., Ovsyannikov D.A., Eseev M.K. Study of the stability of charged particle dynamics in a Penning–Malmberg–Surko trap

- with a rotating field. *Doklady Physics*, 2017, vol. 62, no. 10, pp. 457–460. <https://doi.org/10.1134/S1028335817100093>
4. Ovsyannikov A.D. Analysis of the dynamics of charged particles in an ideal Penning trap with a rotating field and a buffer gas. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, no. 1, pp. 62–75. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.105> (in Russian)
 5. Ovsyannikov A.D. *Matematicheskie modeli optimizatsii dinamiki puchkov* [Mathematical models of optimization of beam dynamics]. Saint Petersburg, VVM Publ., 2014, 181 p. (in Russian)
 6. Ovsyannikov A.D., Raikonen M.A. Algoritm priblizhennogo rascheta multiplikatorov dlya odnoi periodicheskoi sistemy [Algorithm of approximate calculation of multipliers for one periodic system]. *Vestnik of the Saint Petersburg State University of technology and design. Series 1. Natural and technical Sciences*, 2017, no. 3, pp. 10–14. (in Russian)
 7. Ovsyannikov D.A. *Modelirovanie i optimizatsiya dinamiki puchkov zaryazhennykh chastits* [Modeling and optimization of charged particle beam dynamics]. Leningrad, LGU Publ., 1990, 312 p. (in Russian)
 8. Hasegawa T., Jensen M.J., Bollinger J.J. Stability of a Penning trap with a quadrupole rotating field. *Phys. Rev.*, 2005, A 71, 023406. vol. 71, no. 2. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.023406>
 9. Isaac C.A. Motional sideband excitation using rotating electric fields. *Phys. Rev.*, 2013, A 87, 043415, vol. 87, no. 4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.043415>
 10. Isaac C.A., Baker C.J., Mortensen T. et al. Compression of positron clouds in the independent particle regime. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, 107, 033201, vol. 107, no. 3. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.033201>
 11. Meshkov I.N., Eseev M.K., Ovsyannikov A.D. et al. Analysis of the particle dynamics stability in the Penning–Malmberg–Surko trap. *Proc. XXV Russian Particle Accelerator Conference. RuPAC 2016*. Saint Petersburg, 2016, pp. 64–66. <https://doi.org/10.18429/JACoW-RuPAC2016-WECAMH03>
 12. Ovsyannikov A.D., Meshkov I.N., Ovsyannikov D.A. et al. Analysis and Modeling of the Charged Particle Beam Dynamics in the Charlton Trap. *Phys. Part. Nuclei Lett.*, 2018, vol. 15, pp. 754–757. <https://doi.org/10.1134/S1547477118070543>

Aleksandr Ovsyannikov, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Saint Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya embankment, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation, email: a.ovsyannikov@spbu.ru, ovs74@mail.ru

Anna Shlokova, Student, Saint Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya embankment, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation, email: st062298@student.spbu.ru

Alena Komarova, Student, Saint Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya embankment, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation, email: st062167@student.spbu.ru

Received 30.12.2020