

ОБЗОРЫ И РЕЦЕНЗИИ REVIEWS



Серия «Математика»
2020. Т. 32. С. 118–123

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.9

MSC 34-02, 35-02, 47-02

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.118>

Монография «К общей теории дифференциально-операторных и кинетических моделей»*

Н. А. Сидоров¹, Д. Н. Сидоров^{1,2,3}, А. В. Синицын⁴

¹ *Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация*

² *Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Российская Федерация*

³ *Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Российская Федерация*

⁴ *Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia*

Аннотация. Дан обзор содержания монографии [Sidorov N., Sidorov D., Sinitsyn A. *Toward General Theory of Differential-Operator and Kinetic Models*. Book Series: World Scientific Series on Nonlinear Science Series A vol. 97, eds. Prof. L. Chua, World Scientific, S'pore, 2020], посвященной современным методам исследования нестандартных классов дифференциально-операторных и кинетических уравнений с конструктивной точки зрения. Кроме качественных проблем, связанных с доказательством теорем существования, бифуркацией и разрушением решений нелинейных систем, корректными постановками новых начально-краевых задач в функциональных пространствах, большое внимание уделено проблеме построения асимптотических приближений решений и численно-аналитическому анализу в математическом моделировании.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейный анализ, плазма, уравнение Власова – Максвелла, бифуркация, регуляризация, метод Ляпунова – Шмидта.

* Результаты главы 2 монографии выполнены при финансовой поддержке РФФИ No. 19-58-53011 (совместно с ГФЕН, КНР No. 61911530132).

Нелинейные математические модели с параметрами лежат в основе естественных наук и имеют важное значение в различных инженерных областях. Многие критические процессы в гидродинамике, термодинамике, электроэнергетике и в физике плазмы моделируются с использованием теории нелинейных дифференциально-операторных уравнений. Системы Власова – Максвелла и другие кинетические модели играют важную роль в современной математической физике. Проблемы, обсуждаемые в монографии [1], приобретают все большее значение в области физики плазмы, в моделировании и в управлении нелинейных динамических систем с памятью. Методы Ляпунова – Шмидта (см. также монографию [2]) составляют основу теории бифуркаций для функциональных уравнений.

Целью книги является обзор связей между различными видами дифференциально-операторных, кинетических уравнений и теорией бифуркации с конструктивной точки зрения. Поэтому кроме проблем качественной теории большое внимание уделяется численному анализу и приближенным методам. Развита результаты по теории и приложению интегральных динамических моделей, изложенные ранее в [3].

Монография состоит из трех основных частей. Первая часть посвящена операторным и дифференциально-операторным уравнениям с параметрами из нормированных пространств. В главе 1 изложены основы теории линейных операторов с параметрами, аппарат жордановой структуры таких операторов и описан один метод регуляризации. Введение в теорию уравнений первого рода и регуляризация таких уравнений с использованием метода возмущений приведены в разделе 1.2. В главе 2 представлена теория операторных уравнений Вольтерра с разрывными ядрами. Доказаны теоремы существования параметрических семейств решений, построены асимптотики решений и даны регуляризованные численные методы. Алгоритм исследования ветвления решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков в окрестности точек ветвления представлен в главе 3. Нелинейные операторные уравнения с функциональным возмущением аргумента рассматриваются в главе 4. Нелинейные системы дифференциальных и операторных уравнений с вырождением изучаются в главе 5. Наконец, новая теория скелетных разложений операторов применяется для решения линейных систем ОДУ и систем уравнений в частных производных с необратимыми операторами в главной части уравнений.

Вторая часть монографии посвящена абстрактным нелинейным системам, зависящим от параметров и опирается на топологические, алгебраические и вариационные методы. Так в главе 8 описан метод выпуклых мажорант Ляпунова – Канторовича в полуупорядоченных пространствах. Метод используется далее для оценки области существования и прогнозирования разрушения ветвей решений. Глава 9 начинается с определения точки бифуркации нелинейного операторного уравнения.

Далее строится система уравнений разветвления. В главе 10 доказаны общие теоремы существования точек бифуркации на основе применения теории особых точек конечномерных векторных полей. Уравнения разветвления изучаются с помощью аналитического метода Ляпунова – Шмидта.

При определенных условиях асимптотика непрерывных ветвей в окрестностях точек разветвления построена в главе 11. Глава 12 посвящена алгоритмам решения нелинейных уравнений в окрестностях точек ветвления. Предложенные алгоритмы позволяют строить N -ступенчатый метод последовательных приближений в окрестностях точек ветвления. Новая теория ветвления решений для сплетающихся уравнений описана в главе 13. Эта теория позволяет исследовать различные ветви решений, зависящих от свободных параметров. Глава 15 и глава 16 посвящены нелинейным уравнениям с векторным параметром. Результаты применены для исследования ряда задач механики. В главе 17 рассмотрены сплетающиеся и потенциальные уравнения разветвления. Исследуется наличие свободных параметров в разветвляющихся решениях широких классов нелинейных уравнений в банаховых пространствах.

Третья часть монографии посвящена кинетическим моделям с упором на системы Власова – Максвелла (ВМ). Уравнение Власова впервые было предложено А. А. Власовым в 1938 г. для описания плазмы и подробно обсуждалось в его монографии. На этой базе вводилась система ВМ, использованная впоследствии многими учеными в большом цикле исследований. Соответствующие ссылки есть, например, в обзоре А. Л. Скубачевского, в литературе по численному анализу одномерного и двумерного моделирования систем ВМ, в работах В. Eliasson и других ученых, изучавших, например плазму в ионосфере. Ключевые математические задачи для системы ВМ связаны с существованием глобальных классических решений размерности три и затуханием Ландау, которое имеет бесстолкновительный характер поведения.

Отметим, что французский математик С. Виллани удостоен Филдсовской премии в 2010 г. за математические результаты по изучению этого явления. Физические приложения уравнения Власова очень широки и ранжируются от магнитного равновесия плазмы для термоядерной реакции до исследований космической плазмы в магнитосфере планет и звездных ветрах, а также релятивистской электромагнитной плазмы при взаимодействии ультра-интенсивных лазерных импульсов с материей. Система ВМ вводится в рассмотрение в главе 19. Раздел 19.1 носит вспомогательный характер и предназначен для студентов, инженеров и аспирантов. Здесь вводится анзац функции распределения для двухкомпонентной плазмы. Простые постановки задачи рассмотрены для нелинейного эллиптического уравнения как для задачи Коши, так и для бифуркационного случая. В главе 20 исследованы другие кинетические модели, например уравнение Больцмана, системы Вла-

сова – Пуассона (ВП) и ВМ и их подробное математическое описание. Используется техника вывода уравнений на основе предварительного сдвига частиц по траекториям произвольной системы дифференциальных уравнений в метрических пространствах. В главах 21–24 изучаются специальные классы стационарных и нестационарных решений системы ВМ путем редукции к системе эллиптических уравнений с граничными условиями. Доказываются теоремы существования решений таких задач с соответствующими ограничениями на функцию распределения. Задача бифуркации для стационарной системы ВМ рассматривается в главах 25–27. Она преобразуется к полулинейной эллиптической системе и изучается как операторное уравнение в банаховом пространстве. Используя классический подход Ляпунова – Шмидта, изложенный во второй части монографии, построена асимптотика нетривиальных ветвей решений. В результате установлена теорема существования точек бифуркации, показывающая их связь с асимптотическими свойствами нетривиальных ветвей решений системы ВМ. Цель главы 28 состоит в изучении стационарной самосогласованной задачи магнитной изоляции посредством системы ВМ. В безразмерной форме этой системы вводится малый параметр в виде отношения типичной скорости частицы на катоде к достигаемой скорости на аноде. На этой основе строится алгоритм эффективного асимптотического анализа, обосновывающего некоторые результаты И. Ленгмюра и К. Т. Комптона. Рассмотрено и обобщение данного подхода на магнитные течения.

В монографии приведены некоторые открытые фундаментальные проблемы и задачи, которые могут быть использованы при проведении диссертационных исследований в теоретической и прикладной математике.

Список литературы

1. Sidorov N., Sidorov D., Sinityn A. *Toward General Theory of Differential-Operator and Kinetic Models*. S'pore : World Scientific, 2020. 400 p. (World Scientific Series on Nonlinear Science Series A / ed. L. Chua. ; vol. 97). <https://doi.org/10.1142/11651>
2. Sidorov N., Loginov B., Sinityn A., Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*. Kluwer, 2002, 548 p. (Mathematics and Its Applications ; vol. 550). <https://doi.org/10.1007/978-94-017-2122-6>
3. Sidorov D. *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals & Control*. S'pore : World Scientific, 2015. 300 p. (World Scientific Series on Nonlinear Science Series A ; vol. 87). <https://doi.org/10.1142/9278>

Николай Александрович Сидоров, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и информационных технологий, Иркутский государственный университет, Российская Федера-

ция, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса 1, e-mail: dsidorov@isem.irk.ru
ORCID iD <http://orcid.org/0000-0001-9331-1921>

Денис Николаевич Сидоров, доктор физико-математических наук, профессор РАН, главный научный сотрудник, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Российская Федерация, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130, тел.: +7 (3952) 500 646 ext. 258; Институт математики и информационных технологий, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса 1; Иркутский национальный исследовательский технический университет, Российская Федерация, 664074 г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, e-mail: dsidorov@isem.irk.ru
ORCID iD <http://orcid.org/0000-0002-3131-1325>.

Александр Владимирович Сеницын, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный университет Колумбии, Богота, Колумбия, e-mail: avsinityn@yahoo.com

Поступила в редакцию 14.04.2020

Review of Monograph "Toward General Theory of Differential – Operator and Kinetic Models"

N. A. Sidorov¹, D. N. Sidorov^{1,2,3}, A. V. Sinityn⁴

¹ *Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation*

² *Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation*

³ *Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russian Federation*

⁴ *Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia*

Abstract. The brief review of monograph [Sidorov N., Sidorov D., Sinityn A. *Toward General Theory of Differential-Operator and Kinetic Models*. Book Series: World Scientific Series on Nonlinear Science Series A vol. 97, eds. Prof. L. Chua, World Scientific, Singapore, London, 2020] is provided. This monograph devoted to the state-of-the-art methods for the non-standard classes of differential operator and kinetic equations from a constructive point of view. In addition to the qualitative problems associated with the proof of existence theorems, bifurcation and blow-up of solutions of nonlinear systems, this monograph provides the formulations of the novel initial-boundary value problems in function spaces. Attention is paid to the problem of constructing asymptotic approximations of solutions and numerical-analytical analysis in mathematical modeling.

Keywords: mathematical modeling, nonlinear analysis, plasma, Vlasov-Maxwell equation, bifurcation, regularization, Lyapunov-Schmidt method.

References

1. Sidorov N., Sidorov D., Sinityn A. *Toward General Theory of Differential-Operator and Kinetic Models*. Book Series: World Scientific Series on Nonlinear Science

- Series A, vol. 97, eds. Prof. L. Chua. S'pore, World Scientific, 2020, 400 p. <https://doi.org/10.1142/11651>
2. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A. and Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*. Book Series: Mathematics and Its Applications, vol. 550. Kluwer, 2002, 548 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-2122-6>
 3. Sidorov D. *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals & Control*. Book Series: World Scientific Series on Nonlinear Science Series A, vol. 87. S'pore, World Scientific, 2015, 300 p. <https://doi.org/10.1142/9278>

Nikolai Sidorov, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk 664003, Russian Federation, e-mail: sidorov@isu.runnet.ru

ORCID iD <http://orcid.org/0000-0001-9331-1921>

Denis Sidorov, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Principal Researcher, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, 130, Lermontov st., Irkutsk 664033, Russian Federation, tel. (+7) 500 646 ext. 258; Irkutsk State University; 1, K. Marx st., Irkutsk 664003, Russian Federation; Irkutsk National Research Technical University, 83, Lermontov st., Irkutsk, 664074, Russian Federation, e-mail: dsidorov@isem.irk.ru

ORCID iD <http://orcid.org/0000-0002-3131-1325>.

Alekandr Sinitsyn, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia, e-mail: avsinitsyn@yahoo.com

Received 14.04.2020