Серия «Математика»
2019. Т. 27. С. 80—86

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.5
MSC 22E05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.27.80

О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G_2

С. К. Франчук
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация

Аннотация. В статье рассматриваются подгруппы групп Шевалле, определяемые коврами — наборами аддитивных подгрупп основного кольца определения. Такие подгруппы называются ковровыми и они порождаются корневыми элементами с коэффициентами из соответствующих аддитивных подгрупп. По определению ковер замкнутый, если определяемая им ковровая подгруппа не содержит новых корневых элементов. Одним из принципиально важных вопросов при изучении ковровых подгрупп является вопрос о замкнутости исходного ковра. Известно, что этот вопрос редуцируется к неприводимым коврам, т. е. к коврам, все аддитивные подгруппы которых ненулевые [8; 11].

В данной работе описываются неприводимые ковры типа G_2 над полем K характеристики $p > 0$, все аддитивные подгруппы которых являются R-модулями, в том случае, когда K — алгебраическое расширение поля R. Доказано, что такие ковры являются замкнутыми и могут параметризоваться двумя различными полями только при $p = 3$, а для других p они определяются одним полем и в этом случае соответствующие им ковровые подгруппы с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадают с группами Шевалле типа G_2 над промежуточными подполями P, $R \subseteq P \subseteq K$.

Ключевые слова: группа Шевалле, ковер аддитивных подгрупп, ковровая подгруппа, неприводимый ковер, система корней.

1. Введение

Пусть $G_2(K)$ — группа Шевалле типа G_2 над полем K. Основным результатом статьи является

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа G_2 над полем K характеристики $p > 0$. Предположим, что все $\mathfrak{A}_r$ являются R-модулями над полем R, где K — алгебраическое расширение* *поля R. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из группы Шевалле $G_2(K)$ при $p \neq 3$ все $\mathfrak{A}_r$ совпадают с некоторым подполем P поля K, а при $p = 3$*

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ — короткий корень,} \\ Q, & \text{если } r \text{ — длинный корень.} \end{cases}$$

для некоторых полей P и Q, удовлетворяющих следующим включениям

$$R \subseteq P, Q \subseteq K, \tag{1.1}$$

$$P^3 \subseteq Q \subseteq P. \tag{1.2}$$

При $p > 3$ утверждение теоремы установил В. М. Левчук [8, следствие 3.2], даже при более слабых ограничениях на аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, и в этом случае ковер $\mathfrak{A}$ параметризуется только одним полем. Заметим, что случай $P \neq Q$ при $p = 3$ возможен. Например, пусть $K = P = F_3(x)$ — поле рациональных функций от переменной x над полем из трех элементов, $R = Q = F_3(x^3)$ — поле рациональных функций от переменной x^3 над таким же полем. Очевидно, поля P и Q различные и условия (1.1) и (1.2) выполняются.

Для ковра $\mathfrak{A}$ из вышеизложенной теоремы его ковровая подгруппа $G_2(\mathfrak{A})$ является промежуточной между $G_2(Q)$ и $G_2(P)$ и в силу [10] ковер $\mathfrak{A}$ является замкнутым. Примеры незамкнутых неприводимых ковров любых типов над кольцами указаны в [2] и [7]. Различные факторизации ковровых подгрупп, сомножители которых замкнутые ковровые подгруппы и подгруппы ранга 1, приведены в [4] и [12]. Отметим также, что над локально конечным полем любой неприводимый ковер ранга больше 1 замкнут [3].

Результаты статьи анонсировались в [6].

2. Обозначения и определения

Далее Φ — приведенная неразложимая система корней ранга n, $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над полем K. Группа $E(\Phi, K)$ порождается своими корневыми подгруппами

$$x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}, \quad r \in \Phi.$$

Подгруппы $x_r(K)$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)\, x_r(u) = x_r(t + u).$$

Назовем (*элементарным*) *ковром типа* Φ *ранга* n *над* K всякий набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir + js \in \Phi, \ i, j > 0,$$

где

$$\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\},$$

а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$\left[x_s(u), x_r(t)\right] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}\left(C_{ij,rs}(-t)^i u^j\right), \quad r, s, ir+js \in \Phi.$$

Данное определение ковра принадлежит В. М. Левчуку [9]. Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над K определяет *ковровую* подгруппу

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \left\langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \right\rangle$$

группы Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством M группы $E(\Phi, K)$. Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е.

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = \left\langle x_r(\mathfrak{A}_r), r \in \Phi \right\rangle.$$

Известно, что вопрос о замкнутости ковров редуцируется к *неприводимым* коврам, т. е. к коврам, все аддитивные подгруппы которых ненулевые [8], [11].

Следующая лемма является частным случаем следствия 3.2 из [8].

Лемма 1. *Пусть $\{a, b\}$ — фундаментальная система системы корней Φ типа A_2, $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер над полем K, причем все $\mathfrak{A}_r$ являются R-модулями, где K — алгебраическое расширение поля R и $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. Тогда $\mathfrak{A}_r = P$, $r \in \Phi$, для некоторого подполя P поля K.*

Наряду с элементарной группой Шевалле $E(\Phi, K)$ рассматривают расширенную группу Шевалле $\Phi(K)$, которая является расширением группы $E(\Phi, K)$ при помощи всех диагональных элементов $h(\chi)$, где χ — K-характер целочисленной решетки корней $\mathbb{Z}\Phi$, т. е. гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{Z}\Phi$ в мультипликативную группу K^* кольца K [14] (см. также [13]). Любой K-характер χ однозначно задается значениями на фундаментальных корнях и для любых $r \in \Phi$ и $t \in K$

$$h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t).$$

Отметим, что в нашем случае, при $\Phi = G_2$, элементарная группа Шевалле $E(\Phi, K)$ совпадает с расширенной группой Шевалле $\Phi(K)$.

Лемма 2. *[3, лемма 1] Сопрягая диагональным элементом $h(\chi)$ ковровую подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A})$ получим ковровую подгруппу*

$$h(\chi) E(\Phi, \mathfrak{A}) h(\chi)^{-1} = E(\Phi, \mathfrak{A}'),$$

определяемую ковром

$$\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}'_r \mid r \in \Phi\}, \quad \mathfrak{A}'_r = \chi(r)\mathfrak{A}_r.$$

Следующая лемма хорошо известна (см., например [5]).

Лемма 3. *Пусть K — алгебраическое расширение поля R и подкольцо A поля K является R—модулем. Тогда A — поле, причем $R \subseteq A \subseteq K$.*

3. Доказательство теоремы

В [8, следствие 3.2] при $charK > 3$ доказано, что аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$ совпадают с некоторым подполем P поля K. Поэтому теорему нужно доказывать только в следующих двух случаях, которые в [8] не рассматривались: 1) $charK = 2$; 2) $charK = 3$.

Нам потребуются четыре типа коммутаторных формул

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u)x_{3a+b}(\pm t^3u)x_{3a+2b}(\pm t^3u^2), \quad (3.1)$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu)x_{3a+b}(\pm 3t^2u)x_{3a+2b}(\pm 3tu^2), \quad (3.2)$$

$$[x_a(t), x_{2a+b}(u)] = x_{3a+b}(\pm 3tu), \quad (3.3)$$

$$[x_b(t), x_{3a+b}(u)] = x_{3a+2b}(\pm tu). \quad (3.4)$$

По определению ковра формулы (3.1) и (3.2) дают соответственно следующие серии включений:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}; \quad (3.5)$$

$$\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}; \quad (3.6)$$

$$\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}; \quad (3.7)$$

$$\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}; \quad (3.8)$$

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}; \quad (3.9)$$

$$3\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}; \quad (3.10)$$

$$3\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}. \quad (3.11)$$

Аналогично формулы (3.3) и (3.4) дают соответственно включения:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq 3\mathfrak{A}_{3a+b}; \quad (3.12)$$

$$\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_{3a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}. \quad (3.13)$$

Не все из включений (3.5–3.13) будут далее явно использоваться, но для полноты мы приводим все основные типы условий ковровости.

В силу леммы 2 с точностью до сопряжения диагональным элементом из $G_2(K)$ можно считать, что $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$.

Длинные корни из Φ составляют подсистему корней типа A_2 с фундаментальной системой $\{b, 3a+b\}$. Включение $1 \in \mathfrak{A}_{-3a-b}$ следует из (3.7) только для отрицательный корней. Таким образом, $1 \in \mathfrak{A}_{-b} \cap \mathfrak{A}_{-3a-b}$ и по лемме 1 независимо от характеристики поля K все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, индексированные длинными корнями, совпадают с некоторым подполем Q поля K.

Из включений типа $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ следует совпадение всех аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}_r$, соответствующие коротким корням, а затем и включения $Q \subseteq \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. Пусть $\mathfrak{A}_a = P$.

Если $charK = 2$, то из (3.10) получаем $\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq Q$. Следовательно, $\mathfrak{A}_r = Q$ для всех $r \in \Phi$.

Пусть $charK = 3$, тогда из (3.6) следует, что $\mathfrak{A}_a^2 \subseteq \mathfrak{A}_a$. Заметим, что при $charK > 2$ для любой аддитивной подгруппы A поля K из включения $A^2 \subseteq A$ следует, что A является кольцом. Поэтому $\mathfrak{A}_a$ является кольцом, а по лемме 3 — полем. Из включения (3.8) получаем включение $P^3 \subseteq Q$.

Теорема доказана.

4. Заключение

В статье описаны неприводимые ковры типа G_2 над полем K, все аддитивные подгруппы которых являются R-модулями, в том случае, когда K является алгебраическим расширением поля R. Оказалось, что такие ковры являются замкнутыми и параметризуются двумя подполями поля K, причем два различных подполя появляются только тогда, когда характеристика основного поля K равна 3.

Автор статьи выражает искреннюю благодарность профессору Я. Н. Нужину за постановку задачи и помощь в выполнении данной работы.

Список литературы

1. Дряева Р. Ю., Койбаев В. А., Нужин Я. Н. Полные и элементарные сети над полем частных кольца главных идеалов // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2017. Т. 455. С. 42-51.
2. Койбаев В. А. Элементарные сети в линейных группах // Тр. ИММ УрО РАН, 2011. Т. 17, № 4. С. 134–141.
3. Подгруппы групп Шевалле над локально конечным полем, определяемые набором аддитивных подгрупп / В. А. Койбаев, С. К. Куклина, А. О. Лихачева, Я. Н. Нужин // Мат. заметки. 2017. Т. 102. С. 857-865. https://doi.org/10.4213/mzm11038
4. Койбаев В. А., Нужин Я. Н. Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундам. и приклад. математика, 2013. Т. 18, № 1. С. 75-84.

5. Койбаев В. А., Нужин Я. Н. k-инвариантные сети над алгебраическим расширением поля k // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 143–147. https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.114
6. Куклина (Франчук) С. К. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G_2 // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша : тез. докл. М. : Изд-во МГУ, 2018. С. 247-248.
7. Куклина С. К., Лихачева А. О., Нужин Я. Н. О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 192–196.
8. Левчук В. М. О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. № 5. С. 504-517.
9. Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 4. С. 509-525.
10. Нужин Я. Н. О подгруппах групп Шевалле типа B_l, C_l, F_4 и G_2, параметризуемых двумя несовершенными полями характеристики 2 и 3 // Математика в соврем. мире. 2017. С. 90.
11. Нужин Я. Н. Разложение Леви для ковровых подгрупп групп Шевалле над полем // Алгебра и логика, 2016. Т. 55. № 5. С. 558-570. https://doi.org/10.17377/alglog.2016.55.503
12. Нужин Я. Н. Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. Сиб. федер. ун-та. 2011. Т. 4. № 4. С. 527-535.
13. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М. : Мир, 1975.
14. Carter R.W. Simple groups of Lie type // Pure Appl. Math. 1972. N 28.

Светлана Константиновна Франчук (Куклина), аспирант, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, 660041, Российская Федерация, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, корп. 3, тел.: 8 906 915 7931
(e-mail: `svetlya4ok-03@mail.ru`)

Поступила в редакцию 17.01.19

On Irreducible Carpets of Additive Subgroups of Type G_2

S. K. Franchuk

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation

Abstract. This article discusses the subgroups of Chevalley groups, defined by carpets — the sets of additive subgroups of the main definition ring. Such subgroups are called carpet subgroups and they are generated by root elements with coefficients from the corresponding additive subgroups. By definition, a carpet is closed if the carpet subgroup, which it defines, does not contain new root elements. One of the fundamentally important issues in the study of carpet subgroups is the problem of the closure of the original carpet. It is known that this problem is reduced to irreducible carpets, that is, to carpets, all additive subgroups of which are nonzero [8; 11]. This paper describes irreducible carpets of type G_2 over a field K of characteristics $p > 0$, all additive subgroups of which are R–modules, in case when K is an algebraic extension of R. It is proved that such carpets are closed and can be parametrized by two different fields only for $p = 3$, and for other p they are determined by one field. In this case the corresponding carpet subgroups coincide with Chevalley groups of type G_2 over intermediate subfields P, $R \subseteq P \subseteq K$.

Keywords: Chevalley group, carpet of additive subgroups, carpet subgroup, irreducible carpet, root system.

References

1. Dryaeva R.Y., Koibaev V.A., Nuzhin Ya.N. Full and elementary nets over the quotient field of a principal ideal ring. *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2017, vol. 455, pp. 42-51. (in Russian)
2. Koibaev V.A. Elementary nets in linear groups. *Tr. IMM UrB RAS*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 134–141. (in Russian)
3. Koibaev V.A., Kuklina S.K., Likhacheva A.O., Nuzhin Ya.N. Subgroups, of Chevalley groups over a locally finite field, defined by a family of additive subgroups. *Mathematical Notes,* 2017. vol. 102, pp. 857-865. (in Russian)https://doi.org/10.4213/mzm11038
4. Koibaev V.A., Nuzhin Ya.N. Subgroups of the Chevalley groups and Lie rings definable by a collection of additive subgroups of the initial ring. *Fundam. Prikl. Mat.*, 2013, vol. 18, no. 1, pp. 75-84. (in Russian)
5. Koibaev V.A., Nuzhin Ya.N. k-invariant nets over an algebraic extension of a field k. *Sib Math Journal*, 2017, vol. 58, no. 1, pp. 143–147. (in Russian)https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.114
6. Kuklina (Franchuk) S.K. On irreducible carpets of additive subgroups of type G_2. International Algebraic Conference dedicated to the 110th anniversary of Professor A. G. Kurosh. *Moscow, MSU Publ.*, 2018. pp. 247-248.
7. Kuklina S.K., Likhacheva A.O., Nuzhin Ya.N. On closeness of carpets of Lie type over commutative rings. *Tr. IMM UrB RAS*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 192–196.(in Russian)
8. Levchuk V.M. On generating sets of root elements of Chevalley groups over a field. *Algebra and logica*, 1983, vol. 22, no. 5, pp. 504-517. (in Russian)
9. Levchuk V.M. Parabolic subgroups of certain ABA-groups. *Mathematical Notes*, 1982, vol. 31, no. 4, pp. 509-525. (in Russian)
10. Nuzhin Ya.N. About subgroups of Chevalley groups of type B_l, C_l, F_4 and G_2 parametrized by two imperfectfields of characteristic 2 and 3. *Mathematics in the modern world*, 2017, p. 90. (in Russian)
11. Nuzhin Ya.N. Levi decomposition for carpet subgroups of Chevalley groups over a field. *Algebra i logica*, 2016, vol. 55, no. 5, pp. 558-570. (in Russian)https://doi.org/10.17377/alglog.2016.55.503
12. Nuzhin Ya.N. Factorization of carpet subgroups of the Chevalley groups over commutative rings. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 527-535.(in Russian)
13. Steinberg R. *Lectures on Chevalley Groups* Moscow, Mir Publ., 1975. (in Russian)
14. Carter R.W. Simple groups of Lie type. *Pure Appl. Math.*, 1972. No. 28.

Svetlana Franchuk (Kuklina), Postgraduate, Siberian Federal University, 79, Svobodniy pr., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, tel.: 8(906)9157931 (e-mail: `svetlya4ok-03@mail.ru`)

Received 17.01.19