



Серия «Математика»

2018. Т. 26. С. 62–75

Онлайн-доступ к журналу:

<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 519.863

MSC 52B55

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.62>

О геометрической медиане выпуклых, а также треугольных и других многоугольных областей*

П. А. Панов

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Москва, Российская Федерация*

Аннотация. Задача Ферма – Торричелли заключается в нахождении точки, сумма расстояний от которой до трех заданных точек минимальна. Она допускает многочисленные обобщения. Если на плоскости задано конечное множество S , состоящее из n точек, то точно так же можно искать точку, минимизирующую в данном случае сумму n расстояний, называемую медианой множества S . Аналогичная конструкция работает в евклидовом пространстве любой размерности и вообще в любом метрическом пространстве. Обобщенная задача Ферма – Торричелли — это задача о минимизации суммы взвешенных расстояний, она является одной из основных, во всяком случае, архетипичных в теории размещений. Уже для трех точек аналитическое решение задачи Ферма – Торричелли и, тем более, обобщенной задачи представляется достаточно сложным.

В настоящей работе рассматривается еще более сложный — непрерывный случай, а именно задача о нахождении геометрической медианы двумерной области, — задача, в которой суммы расстояний заменяются на двойные интегралы.

Нетрудно понять, что геометрическая медиана выпуклой области Ω лежит внутри этой области. Мы добьемся усиления этого результата — будет получена универсальная геометрическая оценка удаленности медианы от границы области Ω , зависящая только от ее площади $S(\Omega)$ и диаметра $d(\Omega)$. Еще одним объектом изучения в данной работе являются плоские многоугольные области. Даже в случае треугольной области при отыскании геометрической медианы, по-видимому, нельзя надеяться на аналитическое решение, заданное в конечном виде. Во всяком случае в известной онлайн энциклопедии Encyclopedia of Triangle Centers среди содержащихся там нескольких тысяч формул для различных центров треугольника формула для геометрической медианы треугольной области отсутствует. Тем не менее, с помощью элементарных функций удастся записать градиентную систему для нахождения геометрической медианы такой области. С помощью триангуляции этот резуль-

* Выражаю признательность В. Ю. Протасову и А. В. Савватееву за конструктивные обсуждения и полезные замечания.

тат переносится на произвольную многоугольную область. Отдельно обсуждаются свойства геометрической медианы равнобедренного треугольника.

Ключевые слова: геометрическая медиана, задача размещения, градиентная система, выпуклая область, удаленность от границы.

1. Введение

Геометрическая медиана напрямую обобщает понятие медианы одномерной выборки в статистике и играет важную роль в теории размещения производства [2; 8; 9]. Напомним, что на плоскости для конечного множества S геометрическая медиана $m(S)$ определяется как

$$m(S) = \arg \min_{y \in \mathbb{R}^2} \sum_{x \in S} |x - y|, \quad (1.1)$$

где $|x - y|$ — обычное евклидово расстояние между точками x и y . Существуют эффективные численные методы нахождения геометрической медианы конечного множества [4], однако показано, что не имеется простой формулы для ее вычисления [3; 12].

Понятие геометрической медианы естественным образом обобщается на непрерывный случай [6; 10; 14]. Далее для упрощения изложения по умолчанию все кривые и области, для которых вычисляются медианы, считаются ограниченными, при этом кривые и границы областей считаются еще и кусочно-дифференцируемыми. Вот как выглядят определения геометрической медианы для кривой L и для непустой области Ω на плоскости:

$$m(L) = \arg \min_{y \in \mathbb{R}^2} \int_{x \in L} |x - y| dL, \quad m(\Omega) = \arg \min_{y \in \mathbb{R}^2} \int_{x \in \Omega} |x - y| d\Omega. \quad (1.2)$$

Сразу же введем следующие обозначения

$$\Sigma_L(y) = \int_{x \in L} |x - y| dL, \quad \Sigma_\Omega(y) = \int_{x \in \Omega} |x - y| d\Omega.$$

Обе определенные здесь функции выпуклые. При выполнении указанных выше условий ограниченности и кусочной дифференцируемости функции Σ_L и Σ_Ω сами будут дифференцируемыми, а их медианы $m(L)$ и $m(\Omega)$ будут единственными решениями соответствующих градиентных систем $\nabla \Sigma_L(y) = 0$ и $\nabla \Sigma_\Omega(y) = 0$.

Отметим, что в последние годы области приложения задачи о нахождении геометрических медиан не дискретных множеств непрерывно расширяются. Например, в работе [14] вопрос об охране периметра сводится к задаче нахождения медианы кривой, а в работе [1] медианы

областей играют существенную роль при рассмотрении задачи о размещении центров благ на территории с заданной плотностью расселения.

2. Неразделимость множества и его геометрической медианы

Это вспомогательный раздел работы: результаты, содержащиеся здесь, хорошо известны.

Если пренебречь деталями, то можно сказать, что неразделимость множества и его медианы сводится к тому, что они не могут лежать в дополнительных полуплоскостях. Это факт нам понадобится в дальнейшем. Здесь мы приведем его доказательство только лишь потому, что оно короткое, а использованная в нем техника будет задействована для получения новых результатов. Множество, о котором здесь идет речь, может быть конечным множеством, кривой или областью на плоскости. Рассмотрим один из этих случаев, формулировка и доказательство двух других случаев аналогичны.

Предложение 1. *Пусть область Ω содержится в некоторой полуплоскости. Тогда ее геометрическая медиана $m = m(\Omega)$ тоже принадлежит этой полуплоскости.*

Доказательство. Из определения функции Σ_Ω следует, что

$$\nabla \Sigma_\Omega(y) = \int_{x \in \Omega} \nabla |y - x| d\Omega = \int_{x \in \Omega} \frac{y - x}{|y - x|} d\Omega. \quad (2.1)$$

Таким образом, чтобы вычислить $\nabla \Sigma_\Omega(y)$, мы должны проинтегрировать по области Ω поле единичных векторов $(y - x)/|y - x|$, и каждый из этих векторов в соответствующей точке $x \in \Omega$ смотрит в направлении точки y . Если область Ω и точка y лежат по разные стороны от прямой — границы полуплоскости, то проекции всех векторов $y - x$ на нормаль к этой прямой имеют одинаковое направление, поэтому интеграл в правой части (2.1) не равен 0, поэтому $\nabla \Sigma_\Omega(y) \neq 0$ и, следовательно, точка y не может быть медианой. \square

Замечание 1. Очевидно, что этот результат верен и в пространствах высших размерностей, а именно, *множество и его медиана не могут лежать в дополнительных полупространствах.*

Замечание 2. Нетрудно распространить этот результат на тот случай, когда в определении медианы вместо стандартной меры в \mathbb{R}^n используется произвольная непрерывная положительная мера.

Предложение 1 может быть переформулировано следующим образом.

Следствие 1. *Геометрическая медиана множества лежит в выпуклой оболочке этого множества. В частности, геометрическая медиана выпуклой области лежит внутри этой области, и геометрическая медиана замкнутой выпуклой кривой лежит в области, ограниченной этой кривой.*

Предложение 1 и Следствие 1 — это важные результаты. В следующем разделе они будут усилены для случая областей.

3. Удаленность медианы от границы

Начнем со следующего утверждения.

Лемма 1 (об удаленности от границы квадрата). *Пусть область Ω , являющаяся подмножеством единичного квадрата, имеет площадь $S = S(\Omega) > 0$. Тогда геометрическая медиана $m = m(\Omega)$ лежит внутри этого квадрата на расстоянии от границы квадрата не меньшем, чем $\frac{S^2}{8}$.*

Доказательство. Будем считать, что $\Omega \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Предложение 1 говорит нам о том, что медиана $m = (m_1, m_2)$ области Ω тоже лежит в этом квадрате. Что касается удаленности медианы от границы квадрата, то мы проведем доказательство от противного, предположив, без ограничения общности, что $m_2 < \frac{S^2}{8}$ (рис. 1).

Разобьем множество Ω на три подмножества $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ согласно тому, какое из следующих неравенств выполнено для $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ (рис. 1):

- 0) $x_2 < S^2/8$;
- 1) $S^2/8 \leq x_2 < S/2$;
- 2) $x_2 \geq S/2$.

Чтобы получить противоречие, достаточно доказать, что при сделанном предположении функция $\Sigma_\Omega(y)$ в точке m имеет ненулевой градиент, конкретно

$$\frac{\partial \Sigma_\Omega}{\partial \vec{e}_2}(m) = \frac{\partial}{\partial \vec{e}_2} (\Sigma_{\Omega_0} + \Sigma_{\Omega_1} + \Sigma_{\Omega_2})(m) < 0.$$

Проведем оценку каждого из присутствующих слагаемых.

Вспомним, что для вычисления $\nabla \Sigma_\Omega(m)$ мы должны проинтегрировать по области Ω поле единичных векторов $(m-x)/|m-x|$, и каждый из этих векторов в соответствующей точке $x \in \Omega$ смотрит в направлении точки m . При этом, конечно же, каждая из компонент вектора $(m-x)/|m-x|$ сама по модулю не превосходит 1.

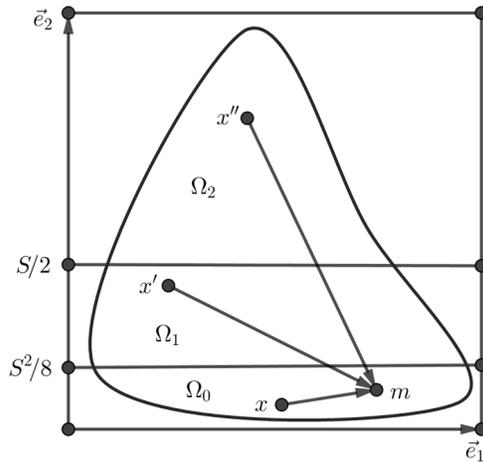


Рис. 1. Подобласть Ω единичного квадрата разбита на три подмножества

Первая оценка

$$\frac{\partial \Sigma_{\Omega_0}}{\partial \vec{e}_2}(m) \leq \frac{S^2}{8}$$

как раз следует из того, что ее левая часть — это интеграл от функции, модуль которой не превосходит 1, по прямоугольнику, площадь которого равна $S^2/8$.

Вторая оценка

$$\frac{\partial \Sigma_{\Omega_1}}{\partial \vec{e}_2}(m) \leq 0$$

следует из того, что все векторы $m - x'$, где $x' \in \Omega_1$ и, значит, векторы $(m - x')/|m - x'|$, направлены вниз — их вторая координата отрицательна.

И последнее, площадь Ω_2 очевидным образом не меньше $S/2$, а вторая координата вектора $(m - x'')/|m - x''|$, $x'' \in \Omega_2$ отрицательна и по модулю строго больше отношения высоты среднего прямоугольника к диагонали квадрата, то есть не меньше, чем $(S/2 - S^2/8)/\sqrt{2}$. Поэтому

$$\frac{\partial \Sigma_{\Omega_2}}{\partial \vec{e}_2}(m) \leq \frac{S}{2} \cdot \frac{\frac{S^2}{8} - \frac{S}{2}}{\sqrt{2}}.$$

Так как $S \leq 1$, то тем более мы имеем:

$$\frac{\partial \Sigma_{\Omega_2}}{\partial \vec{e}_2}(m) \leq \frac{S}{2} \cdot \frac{\frac{S}{8} - \frac{S}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{3S^2}{16\sqrt{2}}.$$

Складывая все три оценки, получаем

$$\frac{\partial \Sigma_{\Omega}}{\partial \vec{e}_2}(m) \leq \frac{S^2}{8} + 0 - \frac{3S^2}{16\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 3}{16\sqrt{2}} S^2 < 0.$$

Противоречие получено — и лемма доказана. \square

Для выпуклых областей из леммы 1 непосредственно выводим следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $S(\Omega)$ и $d(\Omega)$ — площадь и диаметр ограниченной выпуклой области Ω . Геометрическая медиана $m(\Omega)$ лежит внутри Ω и удалена от границы $\partial\Omega$ на расстояние, большее чем $\frac{S^2(\Omega)}{8d^3(\Omega)}$, т. е.

$$\text{dist}(m(\Omega), \partial\Omega) > \frac{S^2(\Omega)}{8d^3(\Omega)}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Любой прямоугольник, описанный вокруг выпуклой области Ω , т. е. такой, что его стороны лежат на опорных прямых этой области, имеет стороны, не превосходящие ее диаметра $d(\Omega)$. Отсюда следует, что для любого направления ℓ существует квадрат \square_ℓ , содержащий Ω , сторона которого параллельна направлению ℓ и имеет длину $d(\Omega)$.

Теперь применим к квадрату \square_ℓ гомотегию H с коэффициентом $1/d(\Omega)$ и введем обозначения $\Omega' = H(\Omega)$, $\square'_\ell = H(\square_\ell)$ и $m' = H(m)$, где $m = m(\Omega)$. Ясно, что $m' = m(\Omega')$, $d(\Omega') = 1$ и квадрат \square'_ℓ — единичный, а также $S(\Omega') = S(\Omega)/d^2(\Omega)$. К области Ω' и квадрату \square'_ℓ применима Лемма 1, поэтому

$$\text{dist}(m', \partial\square'_\ell) > \frac{S^2(\Omega')}{8}.$$

Умножая обе части неравенства на $d(\Omega)$ и учитывая, что $S^2(\Omega') = S^2(\Omega)/d^4(\Omega)$, получаем

$$\text{dist}(m, \partial\square_\ell) > \frac{S^2(\Omega)}{8d^3(\Omega)}.$$

Пусть теперь задана произвольная опорная прямая области Ω , обозначим ее направление за ℓ . Очевидным образом существует соответствующий квадрат \square_ℓ , одна из сторон которого лежит на этой прямой. Отсюда сразу следует, что расстояние от медианы $m(\Omega)$ до любой опорной прямой, а значит и до границы $\partial\Omega$, тоже превосходит $\frac{S^2(\Omega)}{8d^3(\Omega)}$. Теорема 1 доказана. \square

4. Градиентная система для медианы треугольной области

В этом разделе будет выписана в явном виде градиентная система для вычисления медианы треугольной области. Пусть P_1, P_2, P_3 —

фиксированные точки на плоскости, служащие вершинами треугольной области Δ . Сначала определим функцию F , аргументами которой служит пара векторов (x, p) ,

$$F(x, p) = \frac{|p - x|}{2} + \frac{(p \cdot x)(|x| - |p - x|)}{2p^2} + (p \wedge x)^2 \frac{\ln \frac{|p||p - x| + p \cdot (p - x)}{|p||x| - p \cdot x}}{2|p|^3}, \quad (4.1)$$

где символ \cdot обозначает операцию скалярного умножения, а $p \wedge x$ — это ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы p и x . Треугольную область с упорядоченным набором вершин P_1, P_2, P_3 будем обозначать $\Delta = \Delta(P_1, P_2, P_3)$.

Теорема 2. Пусть задана треугольная область Δ с вершинами P_1, P_2, P_3 , а $\vec{\ell}_3$ — это единичный вектор, параллельный стороне P_1P_2 , то есть $\vec{\ell}_3 = (P_2 - P_1)/|P_2 - P_1|$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\ell}_3} \Sigma_{\Delta}(X) = \frac{|(P_1 - P_3) \wedge (P_2 - P_3)|}{|P_2 - P_1|} \cdot \left(F(X - P_3, P_1 - P_3) - F(X - P_3, P_2 - P_3) \right). \quad (4.2)$$

Для вычисления производных вдоль направления двух других сторон треугольника достаточно осуществить циклическую перестановку индексов в этой формуле. Обнуление любых двух из этих производных задает систему уравнений для нахождения геометрической медианы треугольника.

Замечание 3. Отметим еще, что для непрерывно дифференцируемых функций знание производных по каким-либо двум направлениям позволяет вычислить и производную по любому другому направлению.

Доказательство. Начнем с небольшого предварительного вычисления. Для точек отрезка P_1P_2 введем обозначение $P(\lambda) = P_1 + \lambda \vec{\ell}_3$, при этом $P(0) = P_1, P(|P_2 - P_1|) = P_2$ (рис. 2).

А затем посчитаем производную $\frac{\partial}{\partial \vec{\ell}_3} \Sigma_{P_1P_2}(X)$, где в соответствии с нашими предыдущими обозначениями,

$$\Sigma_{P_1P_2}(X) = \int_0^{|P_2 - P_1|} |P(\lambda) - X| d\lambda.$$

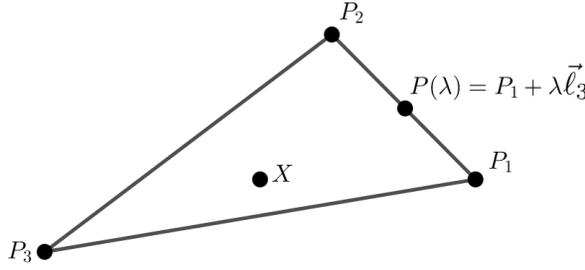


Рис. 2. Параметризация отрезка P_1P_2

Для этого сначала вычислим приращение функции $\Sigma_{P_1P_2}(X)$ при смещении точки X на расстояние $\Delta\lambda$ в направлении вектора $\vec{\ell}_3$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{P_1P_2}(X + \Delta\lambda \cdot \vec{\ell}_3) - \Sigma_{P_1P_2}(X) &= \\ &= \int_0^{|P_2-P_1|} |P(\lambda) - X - \Delta\lambda \cdot \vec{\ell}_3| d\lambda - \int_0^{|P_2-P_1|} |P(\lambda) - X| d\lambda = \\ &= \int_0^{|P_2-P_1|} |P(\lambda - \Delta\lambda) - X| d\lambda - \int_0^{|P_2-P_1|} |P(\lambda) - X| d\lambda = \\ &= \int_{-\Delta\lambda}^{|P_2-P_1|-\Delta\lambda} |P(\lambda) - X| d\lambda - \int_0^{|P_2-P_1|} |P(\lambda) - X| d\lambda = \\ &= \int_{-\Delta\lambda}^0 |P(\lambda) - X| d\lambda - \int_{|P_2-P_1|-\Delta\lambda}^{|P_2-P_1|} |P(\lambda) - X| d\lambda. \end{aligned}$$

Для вычисления производной $\frac{\partial}{\partial \vec{\ell}_3} \Sigma_{P_1P_2}(X)$ осталось поделить найденное приращение на $\Delta\lambda$ и перейти к пределу при $\Delta\lambda \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{\ell}_3} \Sigma_{P_1P_2}(X) &= |P(0) - X| - |P(|P_2 - P_1|) - X| = \\ &= |P_1 - X| - |P_2 - X|. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Теперь параметризуем две оставшиеся стороны треугольника (рис. 3)

$$P_1(\mu) = P_3 + \mu(P_1 - P_3), \quad P_2(\mu) = P_3 + \mu(P_2 - P_3).$$

Нетрудно понять, что

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\ell}_3} \Sigma_{\Delta}(X) = \text{dist}(P_3, P_1P_2) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \vec{\ell}_3} \Sigma_{P_1(\mu)P_2(\mu)}(X) d\mu,$$

где $\text{dist}(P_3, P_1P_2)$ — это расстояние от точки P_3 до прямой P_1P_2 . С учетом того, что $\text{dist}(P_3, P_1P_2) = |(P_1 - P_3) \wedge (P_2 - P_3)| / |P_2 - P_1|$, и с учетом соотношения (4.3), получаем

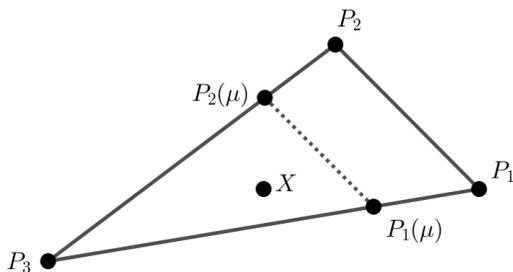


Рис. 3. Параллельная параметризация двух других сторон треугольника

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\ell}_3} \Sigma_{\Delta}(X) = \frac{|(P_1 - P_3) \wedge (P_2 - P_3)|}{|P_2 - P_1|} \int_0^1 (|P_2(\mu) - X| + |P_1(\mu) - X|) d\mu. \quad (4.4)$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно положить $P(\mu) = P_3 + \mu(P - P_3)$ и вычислить следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int |P(\mu) - X| d\mu &= \int \sqrt{(\mu(P - P_3) - (X - P_3))^2} d\mu = \\ &= \int \sqrt{\mu^2(P - P_3)^2 - 2\mu(P - P_3)(X - P_3) + (X - P_3)^2} d\mu. \end{aligned}$$

Это табличный интеграл: под знаком корня расположена квадратичная функция аргумента μ , и обращение к таблицам интегралов позволяет подтвердить правильность соотношения (4.2). \square

5. Свойства геометрической медианы равнобедренного треугольника

Применим полученные результаты к самому простому случаю — к равнобедренному треугольнику. Ясно, что его медиана лежит на его оси симметрии. Поэтому для ее нахождения достаточно вычислить производную функции Σ_{Δ} вдоль этой оси и найти корень этой производной, лежащий на оси.

Предложение 2. Пусть задан равнобедренный треугольник с основанием $2a$ и высотой h . Его геометрическая медиана лежит на высоте, опущенной на основание, и удалена от основания на расстояние u ,

являющееся корнем уравнения

$$\frac{a\sqrt{a^2+y^2} + y^2 \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2+y^2}}{y}\right)}{2} - \frac{a(a^2+hy)\sqrt{a^2+y^2} + ah(h-y)^2}{2(a^2+h^2)} + \frac{a^3(h-y)^2 \ln\left(\frac{|h-y|(\sqrt{a^2+h^2}-h)}{a^2+hy+\sqrt{a^2+h^2}\sqrt{a^2+y^2}}\right)}{2(a^2+h^2)^{3/2}} = 0. \quad (5.1)$$

Доказательство. Расположим вершины равнобедренного треугольника Δ в точках $(0, 0)$, $(2a, 0)$, (a, h) . Вершины прямоугольного треугольника, являющегося левой половиной треугольника Δ , обозначим за P_1 , P_2 , P_3 . Очевидно, что $P_1 = (a, 0)$, $P_2 = (a, h)$, $P_3 = (0, 0)$ (рис. 4).

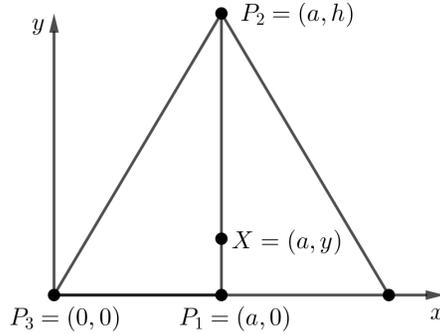


Рис. 4. Прямоугольный треугольник $P_1P_2P_3$ — половина равнобедренного

Ясно, что на оси симметрии треугольника Δ вклад от его левой и правой половины совпадает, поэтому выполняется равенство

$$\Sigma_{\Delta}(a, y) = 2\Sigma_{P_1P_2P_3}(a, y).$$

Поэтому для нахождения геометрической медианы Δ достаточно найти корень производной $\Sigma_{P_1P_2P_3}(a, y)'_y$. Теорема 2 позволяет выписать соответствующее уравнение. Результат вычислений совпадает с уравнением (5.1). \square

Уравнение (5.1) позволяет получить численные и некоторые аналитические результаты о расположении геометрической медианы для совокупности всех равнобедренных треугольников.

Предложение 3. *Рассмотрим совокупность всех равнобедренных треугольников $\Delta = \Delta(h)$ с фиксированным основанием 2 и произволь-*

ной высотой h . Расстояние от медианы до основания в таком треугольнике обозначим за $m = m(h)$. Имеют место следующие асимптоты:

$$\begin{aligned} m(h)/h &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \ln h}, & h \rightarrow 0 \\ m(h)/h &\approx 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \ln h}{4h^2}, & h \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Этот результат непосредственно следует из асимптотического анализа решений уравнения (5.1) для случая $a = 1$. Сопроводим его рисунком 5, на котором изображен график функции $m(h)/h$, полученный в результате численного решения уравнения (5.1) в диапазоне $0 < h < 10$ при условии $a = 1$. График оснащен двумя асимптотическими кривыми (5.2).

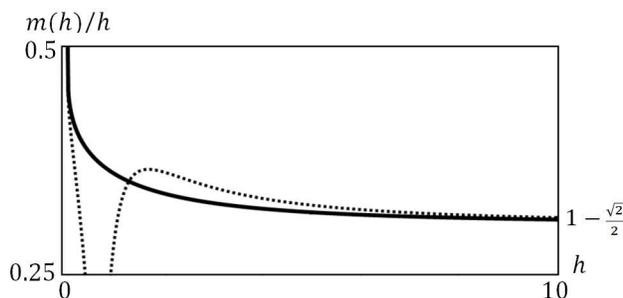


Рис. 5. График функции $m(h)/h$ вместе с двумя асимптотическими кривыми (5.2)

Закончим изложение следующим замечанием.

Добавление о многоугольных областях. В принципе теорема 2 позволяет составить градиентную систему для любой многоугольной области Δ . Сначала мы можем триангулировать Δ , $\Delta = \Delta_1 \sqcup \dots \sqcup \Delta_n$, а затем, используя Замечание 3, найти для каждого треугольника Δ_i производную по направлению $\frac{\partial}{\partial \ell} \Sigma_{\Delta_i}$. Затем, используя свойство аддитивности интеграла, можно вычислить производную по направлению для всей области Δ :

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \Sigma_{\Delta} = \frac{\partial}{\partial \ell} \Sigma_{\Delta_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial \ell} \Sigma_{\Delta_n}.$$

Вычислив таким образом производные по двум направлениям и приравняв их нулю, мы получим градиентную систему в элементарных функциях для вычисления геометрической медианы многоугольной области Δ .

6. Заключение

Отметим, что использованные в настоящей работе методы могут оказаться полезными и в других ситуациях. Например, при рассмотрении других метрик или при замене евклидова расстояния $|x - y|$ в определениях (1.1) и (1.2) на некоторую функцию от этого расстояния.

Добавим, что для конечного множества $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ при замене евклидова расстояния на его квадрат и решения соответствующей задачи минимизации получается известная характеристика множества S — его среднее или центр масс $\mu = \sum_{i=1}^n x_i/n$, то же самое верно для кривых и областей. Причем это среднее может быть легко использовано для локализации геометрической медианы как в дискретном случае [11]

$$|m - \mu| \leq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \mu|}{n},$$

так и в непрерывном.

Список литературы

1. Панов П. А. Равновесные расположения центров благ по городу // Журн. Новой экон. ассоциации. 2017. № 1(33). С. 28–42.
2. Савватеев А. В. Задача многомерного размещения и ее приложения: теоретико-игровой подход : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / ЦЭМИ РАН. М., 2013. 267 с.
3. Bajaj C. Proving geometric algorithms nonsolvability: An application of factoring polynomials // Journal of Symbolic Computation. 1986. Vol. 2, N 1. P. 99–102. [https://doi.org/10.1016/S0747-7171\(86\)80015-3](https://doi.org/10.1016/S0747-7171(86)80015-3)
4. Beck A., Sabach S. Weiszfeld's method: old and new results // J. Optim. Theory Appl. 2013. Vol. 164, N 1. P. 1–40. <https://doi.org/10.1007/s10957-014-0586-7>
5. Boltyanski V., Martini H., Soltan V. Geometric Methods and Optimization Problems. Vol. 4. Combinatorial Optimization. Springer Science & Business Media, 1999. 429 p.
6. Carlsson J., Jia F., Li Y. An approximation algorithm for the continuous k -medians problem in a convex polygon // INFORMS Journal on Computing. 2013. Vol. 26, N 2. P. 280–289. <https://doi.org/10.1287/ijoc.2013.0564>
7. Carmi P., Har-Peled S., Katz M. On the Fermat–Weber center of a convex object // Computational Geometry. 2005. Vol. 32, N 3. P. 188–195. <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2005.01.002>
8. Facility Location. Applications and Theory / Drezner Z., Hamacher H.W. (eds.). Berlin : Springer-Verlag, 2002. 464 p.
9. Encyclopedia of Mathematics, Fermat-Torricelli problem, Weber problem, Fermat point. Available at: <https://www.encyclopediaofmath.org> (date of access: September, 2018).
10. Fekete S., Mitchell J., Beurer K. On the continuous Fermat-Weber problem // Operations Research. 2005. Vol. 53, N 1. P. 61–76. <https://doi.org/10.1287/opre.1040.0137>
11. Mallows C., (August 1991). Another comment on O’Cinneide // The American Statistician. 1991. Vol. 45, N 3. P. 257. <https://doi.org/10.1080/00031305.1991.10475815>

12. Uteshev A. Yu. Analytical Solution for the Generalized Fermat-Torricelli Problem // Amer. Math. Monthly. 2014. Vol. 121, N 4. P. 318–331. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.121.04.318>
13. Wesolowsky G. The Weber problem: History and perspectives // Location Science. 1993. Vol. 1, N 1. P. 5–23.
14. Zhang T., Carlsson J. On the Continuous Fermat-Weber Problem for a Convex Polygon Using Euclidean Distance. Available at: <https://arxiv.org/abs/1403.3715>, 2014 (date of access: September, 2018).

Петр Алексеевич Панов, старший преподаватель, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, 20, Российская Федерация, тел.: 89255092591 (e-mail: panovpeter@mail.ru)

Поступила в редакцию 24.08.18

On the Geometric Median of Convex, Triangular and Other Polygonal Domains

P. A. Panov

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation

Abstract. The classical Fermat-Torricelli problem consists in finding the point which minimizes the sum of distances from it to the three vertices of a given triangle. This problem has various generalizations. For example, given a subset S of the plane consisting of n points, one can look for a point that minimizes the sum of n distances, i.e., the median of S . A similar question can be asked for a Euclidean space of any dimension or for any metric space. The generalized Fermat-Torricelli problem concerns minimizing a weighted sum of distances, and it is one of the main problems in Facility Location theory. An analytic solution of Fermat-Torricelli problem is non-trivial even in the case of three points, and the general case is quite complex.

In this work we consider a further generalization, namely the continuous case in which we look for a geometric median of a two-dimensional domain, where the sum of distances is being replaced by an integral.

It is rather straightforward to see that the median of a convex domain Ω is contained in its interior. In this article we find a universal geometric bound for the distance from the median to the boundary of Ω , which only depends on the area, $S(\Omega)$, and its diameter $d(\Omega)$. Also, we look into polygonal domains. Even in the case of a triangular domain, one can hardly expect an explicit analytic (closed-form) solution. However, using elementary functions, one can obtain a gradient system for finding the geometric median of a triangular domain. By using a triangulation of a polygonal domain, this result can be generalized to polygonal domains. In addition, we discuss in detail the geometric properties of isosceles triangles.

Keywords: geometric median, location problem, convex domain, distance to the boundary, gradient system.

References

1. Panov P.A. Nash Equilibria in the the Facility Location Problem with Externalities. *Journal of the New Economic Association*, 2017, no. 1(33), pp. 28–42. (in Russian)
2. Savvateev A.V. *Zadacha mnogomernogo razmeshheniya i eyo prilozheniya: teoretiko-igrovoj podkhod* Doktorskaya dissertatsiya [The Facility Location Problem and Its Applications: the Game Theoretic Approach. Doctoral dissertation]. Moscow, Central Economic Mathematical Institute Publ., 2013, 267 p. (in Russian)
3. Bajaj C. Proving geometric algorithms nonsolvability: An application of factoring polynomials. *Journal of Symbolic Computation.*, 1986, vol. 2, no. 1, pp. 99-102. [https://doi.org/10.1016/S0747-7171\(86\)80015-3](https://doi.org/10.1016/S0747-7171(86)80015-3)
4. Beck A., Sabach S. Weiszfeld's method: old and new results. *J. Optim. Theory Appl*, 2013, vol. 164, no. 1, pp. 1-40. <https://doi.org/10.1007/s10957-014-0586-7>
5. Boltyanski V., Martini H., Soltan V. *Geometric Methods and Optimization Problems*, Vol. 4 of Combinatorial Optimization. Springer Science & Business Media, 1999, 429 p.
6. Carlsson J., Jia F., Li Y. An approximation algorithm for the continuous k -medians problem in a convex polygon. *INFORMS Journal on Computing*, 2013, vol. 26, no. 2, pp. 280-289. <https://doi.org/10.1287/ijoc.2013.0564>
7. Carmi P., Har-Peled S., Katz M. On the Fermat–Weber center of a convex object. *Computational Geometry*, 2005, vol. 32, no. 3, pp. 188-195. <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2005.01.002>
8. Drezner Z., Hamacher H.W. (eds.) *Facility Location. Applications and Theory*. Berlin, Springer-Verlag, 2002, 464 p.
9. Encyclopedia of Mathematics, Fermat-Torricelli problem, Weber problem, Fermat point. Available at: <https://www.encyclopediaofmath.org> (date of access: September 2018).
10. Fekete S., Mitchell J., Beurer K. On the continuous Fermat-Weber problem. *Operations Research*, 2005, vol. 53, no. 1, pp. 61-76. <https://doi.org/10.1287/opre.1040.0137>
11. Mallows C., Another comment on O'Conneide. *The American Statistician*, 1991, vol. 45, no 3, p. 257. DOI:10.1080/00031305.1991.10475815
12. Uteshev A.Yu. Analytical Solution for the Generalized Fermat-Torricelli Problem. *Amer. Math. Monthly*, 2014, vol. 121, no. 4, pp. 318-331. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.121.04.318>
13. Wesolowsky G. The Weber problem: History and perspectives. *Location Science*, 1993, vol. 1, no. 1, pp. 5-23.
14. Zhang T., Carlsson J. On the Continuous Fermat-Weber Problem for a Convex Polygon Using Euclidean Distance. Available at: <https://arxiv.org/abs/1403.3715>, 2014 (date of access: September 2018).

Petr Panov, Senior Lecturer, National Research University Higher School of Economics, 20, Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russian Federation, tel.: 89255092591 (e-mail: panovpeter@mail.ru)

Received 24.08.18