Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 4. С. 88—95

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.7

Стандартные формы мультиопераций в суперклонах *

Н. А. Перязев
Восточно-Сибирская государственная академия образования

Аннотация. В статье изучаются стандартные формы представления мультиопераций, в частности определяется ключевая стандартная форма мультиопераций и представлен алгоритм нахождения ее в суперклонах.

Ключевые слова: мультиоперация, стандартная форма, алгоритм, пересечение, суперклон.

1. Введение

Алгебраический подход к изучению функциональных систем впервые был предложен А.И. Мальцевым [2]. Среди алгебр функций наибольшее распространение получили клоны - алгебры операций замкнутые относительно суперпозиции и содержащие операции проекций [6, 7]. Наряду с клонами исследуются алгебры отношений (ко-клоны) [1], алгебры частичных операций (частичные клоны) [7], алгебры гиперопераций (гиперклоны) и алгебры мультиопераций (мультиклоны) [8]. Добавляя к мультиклонам операцию разрешимости простейшего уравнения получим алгебру, которую назовем суперклоном [3].

В работе доказываются утверждения, анонсированные в [4], о существовании специальных форм представления мультиопераций в суперклонах и приводятся алгоритмы их нахождения.

2. Основные понятия

Пусть $B(A)$ — множество всех подмножеств A, в том числе $\varnothing$. Отображение из A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A (будем

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09–01–00476.

допускать случай $n = 0$). Мультиоперации также называют частичными гипероперациями или недоопределенными частичными функциями. Для множества всех n-местных мультиопераций на A используем обозначение M_A^n, при $|A| = k$, соответственно, M_k^n. Используем также обозначения

$$M_A = \bigcup_{n \geqslant 0} M_A^n; \quad M_k = \bigcup_{n \geqslant 0} M_k^n.$$

Пусть $S \subseteq M_A$. Алгебра $\mathcal{S} =< S; *, \zeta, \tau, \Delta, \mu, \varepsilon >$ типа $\langle 2, 1, 1, 1, 1, 0 \rangle$ с ниже определенными операциями подстановки $(f * g)$, циклической перестановки аргументов (ζf), транспозиции аргументов (τf), отождествления аргументов (Δf), разрешимости (μf) и операцией ε, выделяющей бинарную мультиоперацию проекцию по первому аргументу, называется *суперклоном* над A:

$(f * g)(a_1, ..., a_{n+m-1}) = \{a | \text{существует } a_0 \in g(a_1, ..., a_m) \text{ такой, что } a \in f(a_0, a_{m+1}, ..., a_{m+n-1})\}$ при $n \geqslant 1$,
$(f * g)(a_1, ..., a_m) = f()$, если $g(a_1, ..., a_m) \neq \varnothing$ и
$(f * g)(a_1, ..., a_m) = \varnothing$, если $g(a_1, ..., a_m) = \varnothing$ при $n = 0$;
$(\zeta f)(a_1, ..., a_n) = f(a_2, ..., a_n, a_1)$ при $n > 1, (\zeta f) = f$ при $n \leqslant 1$;
$(\tau f)(a_1, ..., a_n) = f(a_2, a_1, a_3, ..., a_n)$ при $n > 1, (\tau f) = f$ при $n \leqslant 1$;
$(\Delta f)(a_1, ..., a_{n-1}) = f(a_1, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ при $n > 1$,
$(\Delta f) = \{a | a \in f(a)\}$ при $n = 1, (\Delta f) = f$ при $n = 0$;
$(\mu f)(a_1, ..., a_n) = \{a | a_1 \in f(a, a_2, ..., a_n)\}$, при $n \geqslant 1$,
$(\mu f) = \varnothing$ при $n = 0$;
$\varepsilon = e$, где $e(a_1, a_2) = \{a_1\}$.

Мощность множества A называется *рангом* суперклона.

Стандартным образом определяется суперклон порожденный множеством мультиопераций S и для этого используется общепринятое обозначение $\langle S \rangle$. В случае $S = \{f_1, ..., f_m\}$ пользуемся обозначением $\langle f_1, ..., f_m \rangle$. Суперклон $\langle M_k \rangle$ ранга k будем обозначать $\mathcal{M}_k$ и называть полным суперклоном ранга k.

Используя главные операции суперклона можно определит:

1) операцию ε_i^n, выделяющую мультиоперацию проекцию по i-му аргументу

$$\varepsilon_i^n = e_i^n, \text{ где } e_i^n(a_1, ..., a_n) = \{a_i\};$$

2) операцию транспозиции i-го и j-м аргументов

$$(\tau_{i,j} f)(a_1, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_j, ..., a_i, ..., a_n);$$

3) операцию отождествления j-го аргумента с i-м аргументом

$$(\Delta_{i,j} f)(a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, ..., a_n);$$

4) операцию подстановки на место i-го аргумента

$$(f *_i g)(a_1, ..., a_{n+m-1}) = \bigcup_{b \in g(a_i, ..., a_{i+m-1})} f(a_1, ..., a_{i-1}, b, a_{i+m}, ..., a_{n+m-1});$$

5) частичную операцию суперпозиции

$$(f * (f_1, ..., f_n))(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1,...,a_m)} f(b_1, ..., b_n);$$

6) операцию разрешимости по i-му аргументу

$$(\mu_i f)(a_1, ..., a_n) = \{a | a_i \in f(a_1, ..., a_{i-1}, a, a_{i+1}, ..., a_n)\}.$$

Мультиоперации $f \in M_A^n$ на множестве $A = \{a_0, ..., a_{k-1}\}$ можно представлять как отображения

$$f : \{2^0, 2^1, ..., 2^{k-1}\}^n \to \{0, 1, ..., 2^k - 1\},$$

получаемых из f при кодировке

$$a_i \to 2^i; \ \ \varnothing \to 0; \ \ \{a_{i_1}, ..., a_{i_s}\} \to 2^{i_1} + ... + 2^{i_s}.$$

При этом n-местную мультиоперацию f задаем векторной формой $f = (\alpha_1, ..., \alpha_{k^n})$, где $f(2^{i_1}, ..., 2^{i_n}) = \alpha_i$ и $(i_1, ..., i_n)$ есть представление i в системе исчисления по основанию k.

Вдальнейшем это представление мультиопераций будет постоянно использоваться.

3. Стандартные формы мультиопераций

Введем постоянные обозначения для некоторых мультиопераций. Пусть мультиоперация $\cap \in M_k^2$, определяется так $\cap(a, b) = \{a\} \cap \{b\}$. Как принято для бинарных операций будем вдальнейшем использовать суфиксную форму записи $\cap(a, b) = a \cap b$. Очевидно, что эта мультиоперация коммутативна и ассоциативна. Поэтому, как обычно, несущественные скобки будем опускать. Отметим, что $\cap$ принадлежит любому суперклону, так как $\cap = (\varepsilon *_2 \ (\mu_2 \ \varepsilon))$.

Следующие мультиоперации $p \in M_k^1$ и $d_{i,\alpha}^n \in M_k^n$ определим через их векторное задание

$$p = (2, 4, ..., 2^{k-1}, 1);$$

$$d_{i,\alpha}^n = (2^k - 1, ..., 2^k - 1, \overset{i}{\alpha}, 2^k - 1, ..., 2^k - 1), \quad (1 \leqslant i \leqslant k^n),$$

где $\alpha \in \{0, ..., 2^k - 1\}$. В частности $d_{1,\alpha}^0 = (\alpha)$. Если $\alpha = 2^k - 1$, то используем обозначение $d^{\,n}$, то есть $d^{\,n} = (2^k - 1, ..., 2^k - 1)$. Отметим, что $d^{\,n}$ принадлежат любому суперклону, так как $d^{\,1} = (\Delta \ (\mu_2 \varepsilon))$, $d^{\,n} = (d^{\,n-1} * \ \varepsilon)$ и $d^{\,0} = (\Delta \ d^{\,1})$.

Любую мультиоперацию можно представить единственным образом с точностью до перестановочности компонент в виде, определенном следующей теоремой. Назовем такое каноническое представление *совершенной стандартной формой.*

Теорема 1. *Пусть* $f \in M_k^n$ *и* $f \neq d^{\,n}$. *Тогда*

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_1, ..., x_n),$$

где $d_j \in \{\ d_{i,\alpha}^n \mid \alpha = 2^k - 2^s - 1,\ s \in \{0, ..., k-1\}\}$, *причем для каждой* f *множество компонент разложения* $\{d_j\}$ *единственно.*

Доказательство достаточно очевидно, так как любое собственное подмножество множества $\{a_1, ..., a_k\}$ единственным образом представимо как пересечение некоторого числа максимальных подмножеств.

Следующее следствие к теореме определяет порождающие множества для полных суперклонов.

Следствие. $\mathcal{M}_k = \left\langle p, d_{1,1}^2 \right\rangle$.

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно показать, что выполняется $d_{i,2^k-2^s-1}^n \in \left\langle p, d_{1,1}^2 \right\rangle$ для всех n и $s \in \{0, ..., k-1\}$.

Сначала покажем, что $d_{i,1}^n \in \left\langle p, d_{1,1}^2 \right\rangle$ для всех n и $i \leqslant k^n$.

Действительно, $d_{1,1}^1 = (\Delta\ d_{1,1}^2)$ и $d_{1,1}^n = (d_{1,1}^2 * d_{1,1}^{n-1})$ при $n \geqslant 3$.

Мультиоперации $d_{i,1}^n$ получаются суперпозицией $d_{1,1}^n$ и мультиопераций вида $p_s = \underbrace{(...(p * p)... * p)}_{s} = (2^s, 2^{s+1}, ..., 2^{k-1}, 2^0, ..., 2^{s-1})$, где s легко подбираются. Осталось заметить, что $d_{1,1}^0 = (\Delta\ (d_{1,1}^1 \cap ... \cap d_{k,1}^1))$.

Теперь из следующего равенства $d_{i,2^k-2^s-1}^n = (((\mu\ d_{s,1}^1) * p) * d_{i,1}^n)$ получаем доказательство следствия.

Очевидным образом совершенную стандартную форму можно обобщить.

Пусть $f \in M_k^n$. Тогда следующее представление назовем *стандартной формой* мультиоперации

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{j_1}, ..., x_{j_m}),$$

где $d_j \in \{d_{i,\alpha}^m \mid 0 \leqslant m \leqslant n, \alpha \in \{0, ..., 2^k - 1\}\}$ и d_j существенно зависит только от множества переменных $\{x_{j_1}, ..., x_{j_m}\} \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$.

Очевидно, что стандартная форма для мультиоперации не единственна, но всегда существует, например, совершенная стандартная форма. Алгорим минимизации представлений мультиопераций в классе стандартных форм по числу компонент разложения предложен в [5].

4. Ключевая стандартная форма мультиопераций

Стандартную форму, обладающую свойством, сформулированном в следующей теореме, назовем *ключевой стандартной формой* (к.с.ф.). Теорема утверждает, что для любой мультиоперации существует ключевая стандартная форма.

Теорема 2. *Для любой мультиоперации* $f \in M_k^n$ *существует такое стандартное представление*

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{j_1}, ..., x_{j_m}),$$

при котором выполняется $d_j \in \left\langle f, d^1_{1,1}, ..., d^1_{s,2^{s-1}}, ..., d^1_{k,2^{k-1}} \right\rangle$.

Для доказательства этой теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма. *Для любой мультиоперации* $f \in M_k^n$ *существует разложение по аргументу* x_i

$$f(x_1, ..., x_n) = f_0 \cap f_1 \cap ... \cap f_{2^{s-1}} \cap ... \cap f_{2^{k-1}},$$

где в f_0 *аргумент* x_i *является фиктивным, а* $f_{2^{s-1}}$ *такие, что* 2^{r-1}*-остаточные по аргументу* x_i *при* $r \neq s$ *равны* d^{n-1}, *при этом выполняется*

$$f_0, f_{2^{s-1}} \in \left\langle f, d^1_{1,1}, ..., d^1_{s,2^{s-1}}, ..., d^1_{k,2^{k-1}} \right\rangle, s \in \{1, ..., k\}.$$

Доказательство. Определим $f_0 = (\mu_i\ g_0)$, где $g_0 = (d^1 * (\mu_i f))$. В мультиоперации f_0 аргумент x_i является фиктивным, так как g_0 принимает значения только из множества $\{0,\ 2^k - 1\}$. Далее определим $f_{2^{s-1}} = (\mu_i\ g_{2^{s-1}})$, где $g_{2^{s-1}}$ получается из мультиоперации $h_{2^{s-1}} = ((\mu\ d^1_{s,2^{s-1}}) * (\mu_i f))$ по следующему алгоритму.
Во-первых, заметим, что $h_{2^{s-1}}$ может принимать только значения из множества $\{0, 2^k{-}1, 2^k - 2^{s-1}{-}1\}$. Мультиоперация $g_{2^{s-1}}$ получается из $h_{2^{s-1}}$ доопределение всех нулей индукцией по их числу.

Базис индукции. Если $h_{2^{s-1}}$ не принимает значения 0, то $g_{2^{s-1}} = h_{2^{s-1}}$.

Шаг индукции. Пусть $h_{2^{s-1}}(2^{i_1}, ..., 2^{i_n}) = 0$ и

$$\begin{aligned} h_{2^{s-1}}(2^{i_1}, ..., 2^{i_{t-1}}, 2^0, 2^{i_{t+1}}, ..., 2^{i_n}) &= \alpha_{t1} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ h_{2^{s-1}}(2^{i_1}, ..., 2^{i_{t-1}}, 2^{k-1}, 2^{i_{t+1}}, ..., 2^{i_n}) &= \alpha_{tk} \end{aligned}$$

Если для всех t будет $\alpha_{t1} = ... = \alpha_{tk} = 0$, то берем другой набор на котором мультиоперация равна 0 и не все $\alpha_{tj} = 0$, такой обязательно найдется, так как f определена хоть на одном наборе, иначе $f_{2^{s-1}} = f$.

Тогда мультиоперация определенная ниже будет принимать значение 0 хоть на один раз меньше чем $h_{2^{s-1}}$.

$$\bigcap_t (h_{2^{s-1}} *_t u_{i_t}),$$

где $u_{i_t} = (d^1_{1,1} \cap ... \cap d^{\,1}_{i_t,2^{i_t-1}} \cap d^{\,1}_{i_{t+2},2^{i_t+1}} \cap ... \cap d^1_{k,2^{k-1}}) =$
$$= (1, .., 2^{i_t-1}, 2^k–1, 2^{i_t+1}, ..., 2^{k-1}),$$
а пересечение берется по всем t, для которых не все $\alpha_{t1}, ..., \alpha_{tk}$ равны 0. По индукционному предположению получим, что существует мультиоперация $g_{2^{s-1}}$, являющаяся доопределением $h_{2^{s-1}}$, которая принимает значения только из множества $\{2^k–1,\ 2^k–2^{s-1}–1\}$. А значит мультиоперация $f_{2^{s-1}} = (\mu_i\ g_{2^{s-1}})$ обладает нужными свойствами.

Учитывая два тождества $(\mu_i(h \cap g)) = (\mu_i h) \cap (\mu_i g)$ и $(\mu_i(\mu_i\ g)) = g$ получим следующие равенства:

$$f_0 \cap f_1 \cap ... \cap f_{2^{s-1}} \cap ... \cap f_{2^{k-1}} = (\mu_i\ g_0) \cap (\mu_i\ g_1) \cap ... \cap (\mu_i\ g_{2^{k-1}}) =$$

$$= (\mu_i\ (g_0 \cap\ g_1 \cap ... \cap\ g_{2^{k-1}})) = (\mu_i\ (g_0 \cap\ h_1 \cap ... \cap\ h_{2^{k-1}})) =$$

$$= (\mu_i\ (((2^k–1) * (\mu_i f)) \cap ((\mu\ \ d^1_{1,1}) * (\mu_i f)) \cap ... \cap ((\mu\ \ d^1_{k,2^{k-1}}) * (\mu_i f)))) =$$

$$= (\mu_i(\mu_i f)) = f.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Применим полученную лемму к мультиоперации f по аргументу x_1. Затем к каждой компоненте пересечения применим лемму по аргументу x_2 и так далее по всем компонентам и по всем аргументам.

Учитывая что $(\mu_i\ d^n) = d^n$ получаем разложение, в котором с помощью тождеств $g \cap d^n = g$ и $g \cap g = g$ удалим лишние компоненты и получим искомое представление мультиоперации f.

Теорема доказана.

Приведем пример нахождения представления мультиопераций ключевой стандартной формой.

Пусть $f \in M^2_3$ определена векторно $f = (041050150)$.
Процесс нахождения к.с.ф. представим в виде таблиц. В первой таблице приведены мультиоперации, получаемые после применения леммы по аргументу x.

x	y	f	f_0	f_1	f_2	f_4
1	1	0	1	0	7	7
1	2	4	5	6	7	7
1	4	1	1	7	7	7
2	1	0	1	7	0	7
2	2	5	5	7	7	7
2	4	0	1	7	0	7
4	1	1	1	7	7	7
4	2	5	5	7	7	7
4	4	0	1	7	7	0

где $g_0 = (d^1 * (\mu_x f)) = (777000070)$,
$f_0 = (\mu_x g_0) = (151151151)$;
$h_1 = ((\mu\ d^1_{1,1}) * (\mu_x f)) = (667000070)$, $g_1 = (667677677)$,
$f_1 = (\mu_x g_1) = (067777777)$;
$h_2 = ((\mu\ d^1_{2,2}) * (\mu_x f)) = (575000070)$, $g_2 = (575575575)$,
$f_2 = (\mu_x g_2) = (777070777)$;
$h_4 = ((\mu\ d^1_{3,4}) * (\mu_x f)) = (773000070)$, $g_4 = (773773773)$,
$f_4 = (\mu_x g_4) = (777777770)$.

Во второй таблице приведены мультиоперации, получаемые из f_0, f_1, f_2, f_4, после применения леммы по аргументу y.

f_{00}	f_{01}	f_{02}	f_{04}	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{14}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{24}	f_{40}	f_{41}	f_{42}	f_{44}
5	3	7	7	7	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	7	7	7	7	7	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	7	7	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	3	7	7	7	7	7	7	7	0	7	7	7	7	7	7
5	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	7	7	3	7	7	7	7	7	7	7	0	7	7	7	7
5	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	7	7	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	0

В итоге исключая повторения и d^2 получаем следующее представление:

$$f(x,y) = d^0_{1,5} \cap\ d^1_{1,3}(y) \cap\ d^1_{3,3}(y) \cap\ d^2_{1,0}(x,y) \cap\ d^2_{2,6}(x,y) \cap\ d^2_{4,0}(x,y) \cap \\ \cap\ d^2_{6,0}(x,y) \cap\ d^2_{9,0}(x,y).$$

При этом выполняется:

$$\{d^0_{1,5}, d^1_{1,3}, d^1_{3,3}, d^2_{1,0}, d^2_{2,6}, d^2_{4,0}, d^2_{6,0}, d^2_{9,0}\} \subseteq \left\langle f, d^1_{1,1}, d^1_{2,2}, d^1_{3,4} \right\rangle.$$

Следствие. *Пусть множество мультиопераций K образует суперклон ранга k и $d^1_{s,2^{s-1}} \in K$ для $s \in \{1,...,k\}$. Тогда для любой мультиоперации f выполняется: $f \in K$ тогда и только тогда, когда для всех компонент d_j ключевой стандартной формы f верно $d_j \in K$.*

Список литературы

1. Бондарчук В. Г. Теория Галуа для алгебр Поста / В. Г. Бондарчук, Л. А. Калужнин, В. Н. Котов, Б. А. Ромов // Кибернетика. – 1969. – № 3. – С. 1–10; № 5. – С. 1–9.
2. Мальцев А. И. Итеративные алгебры Поста / А. И. Мальцев. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1976. – 100 с.
3. Перязев Н.А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны / Н. А. Перязев // Уч. зап. Казан. гос. ун-та. Сер.: Физико-математические науки. – 2009. – Т. 151, кн. 2. – С. 120–125.
4. Перязев Н.А. Супеклоны мультиопераций /Н. А. Перязев // Дискретные системы в теории управляющих систем : тр. VIII междунар. конф. – М. : МАИС Пресс, 2009. – С.233–238.
5. Перязев Н. А. Минимизация мультиопераций в классе стандартных форм / Н. А. Перязев, И. А. Яковчук // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 117–126.
6. Яблонский С.В., Функциональные построения в k-значной логике / С. В. Яблонский // Тр. мат. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. – 1958. – Т. 51. – С. 5–142.
7. Lau D. Function Algebras on Finite Sets / D. Lau. – Springer-Verlag Berlin YeideWater Resourses Research. – 2006. – 668 p.
8. Romov B.A. The completeness problem in partial hyperclones / B. A. Romov // Discrete Mathematics. – 2006. – Vol. 306. – P. 1405–1414.

N. A. Peryazev

Standard forms of multioperations in superclones.

Abstract. In article standard forms of representation of multioperations are studied the key standard form multioperations, in particular, is defined and the algorithm of its finding in superclones is presented.

Keywords: multioperation, the standard form, algorithm, crossing, superclone

Перязев Николай Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математической информатики, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, Нижняя набережная, 6; тел.: (3952)240477 (nikolai.baikal@gmail.com)

Peryazev Nikolai, East Siberian State Academy of Education, 6, Nignaya Naberegnaya, Irkutsk, 664011, professor, Phone: (3952)240477 (nikolai.baikal@gmail.com)