Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 1. С. 2—18

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.988.67

Асимптотика и устойчивость разветвляющихся решений задачи о флотирующей границе раздела двух жидкостей *

А. Н. Андронов
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева

Аннотация. Методами теории ветвления в условиях групповой инвариантности вычислена асимптотика разветвляющихся решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах на флотирующей границе раздела двух жидкостей в случае высоких вырождений линеаризованного оператора. Получены критерии их редуцированной устойчивости.

Ключевые слова: капиллярно-гравитационные волны; теория ветвления; групповая симметрия; редуцированная устойчивость.

1. Постановка задачи

В продолжение наших исследований [1, 2, 3] по капиллярно-гравитационным волнам в слоях жидкости со свободной границей рассматривается задача о флотирующей границе раздела двух жидкостей. Определяются периодические с периодами $\dfrac{2\pi}{a} = a_1$ и $\dfrac{2\pi}{b} = b_1$ потенциальные течения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 в пространственном слое со свободной флотирующей границей раздела, ответвляющиеся от основных течений с постоянными скоростями V_1 и V_2 в направлении оси Ox в случае, когда нижняя жидкость занимает полупространство. Потенциалы скоростей имеют вид $\Phi_j(x,y,z) = -V_j x + \varphi_j(x,y,z)$. В безразмерных переменных задача описывается системой дифференциальных уравнений

$\Delta\Phi_1 = 0, \quad -\infty < z < f(x,y),$

$\Delta\Phi_2 = 0, \quad f(x,y) < z < 1,$

* Полученные результаты поддержаны проектом № 2.1.1/6194 программы «Развитие научного потенциала высшей школы» Министерства образования и науки РФ

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0, \quad z = 1,\\
&\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad z = f(x,y), \quad j = 1,2;\\
&\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \tilde{k}_0\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi_1|^2 - \frac{\tilde{k}_0}{2}|\nabla\Phi_2|^2 + (1-k_0)F^2 f +\\
&+\frac{k}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\left[F^2 + \left(-\nabla f\cdot\nabla_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{1}{2}|\nabla{\Phi_1}^2|\right)\right] =\\
&= \gamma F^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)\right], z = f(x,y)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

с убыванием функций Φ_j и их первых производных на бесконечности. Здесь $f(x,y)$ — граница раздела жидкостей, близкая к $z = 0$, $k_0 = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$ — отношение плотностей жидкостей, $k = \dfrac{\sigma}{\rho_1}$, $\tilde{k}_0 = \dfrac{V_2^2}{V_1^2}k_0$, $F^2 = \dfrac{hg}{V_1^2}$ — величина, обратная квадрату числа Фруда, $\gamma = \dfrac{\sigma}{\rho_1 h^2 g}$ — число Бонда.

Система (1.1) допускает двупараметрическую группу сдвигов

$$L_\beta g(x,y) = g(x+\beta_1, y+\beta_2)$$

и отражения

$$
\begin{aligned}
&S_x\colon x \to -x, \quad \Phi_j(x,y,z) \to -\Phi_j(-x,y,z), \quad f(x,y) \to f(-x,y),\\
&S_y\colon y \to -y, \quad \Phi_j(x,y,z) \to \ \ \Phi_j(x,-y,z), \quad f(x,y) \to f(x,-y)
\end{aligned}
$$

2. Построение систем разветвления

При замене переменных

$$\zeta = \frac{z - f(x,y)}{1 - f(x,y)}, u_j(x,y,\zeta) = \Phi(x,y,\zeta(1-f(x,y)) + f(x,y)), F^2 = F_{mn}^2 + \varepsilon,$$

распрямляющей свободную границу раздела, возникает нелинейно возмущенная система двух уравнений Лапласа, принимающая при переходе величины F^2 через критическое значение F_{mn}^2 вид

$$
\begin{aligned}
\Delta u_j = &-2(\zeta-1)(f_x u_{j_{x\zeta}} + f_y u_{j_{y\zeta}}) - 2f u_{j_{\zeta\zeta}} - (\zeta-1)(f_{xx}+f_{yy})u_{j_\zeta} -\\
&- 2(\zeta-1)f(f_x u_{j_{x\zeta}} + f_y u_{j_{y\zeta}}) - (\zeta-1)^2(f_x^2+f_y^2)u_{j_{\zeta\zeta}} - 3f^2 u_{j_{\zeta\zeta}} -\\
&- (\zeta-1)(2(f_x^2+f_y^2) + (f_{xx}+f_{yy})f)u_{j_\zeta}, \quad j = 1,2
\end{aligned}
$$

$$\Delta u_j = -2(\zeta-1)(f_x u_{j_{x\zeta}} + f_y u_{j_{y\zeta}}) - 2f u_{j_{\zeta\zeta}} - (\zeta-1)(f_{xx}+f_{yy})u_{j_\zeta} -$$
$$- 2(\zeta-1)f(f_x u_{j_{x\zeta}} + f_y u_{j_{y\zeta}}) - (\zeta-1)^2(f_x^2+f_y^2)u_{j_{\zeta\zeta}} - 3f^2 u_{j_{\zeta\zeta}} -$$
$$- (\zeta-1)(2(f_x^2+f_y^2) + (f_{xx}+f_{yy})f)u_{j_\zeta}, \quad j=1,2$$
$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \zeta}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{-\infty} = 0$$
$$u_{j_\zeta} - f_x = -f u_{j_\zeta} + f_x u_{j_x} + f_y u_{j_y} - (f_x^2+f_y^2+f^2)u_{j_\zeta}, \quad \zeta=0, j=1,2;$$
$$u_{1_x} - \tilde{k}_0 u_{2_x} + k u_{1_{x\zeta}} + (1-k_0)F_{mn}^2 f - \gamma F_{mn}^2 \Delta f =$$
$$= -\frac{1}{2}|\nabla u_1|^2 + \frac{\tilde{k}_0}{2}|\nabla u_2|^2 + (u_{1_\zeta} - \tilde{k}_0 u_{2_\zeta})f_x + (u_{1_\zeta} - \tilde{k}_0 u_{2_\zeta})f f_x +$$
$$+ (u_{1_x}u_{1_\zeta} - \tilde{k}_0 u_{2_x}u_{2_\zeta})f_x + (u_{1_y}u_{1_\zeta} - \tilde{k}_0 u_{2_y}u_{2_\zeta})f_y - (u_{1_\zeta}^2 - \tilde{k}_0 u_{2_\zeta}^2)f -$$
$$- k\left[F_{mn}^2\left(1 - \frac{f_x^2}{2} - \frac{f_y^2}{2}\right) - f_x u_{1_{xx}} - f_y u_{1_{xy}} + f u_{1_{x\zeta}} + f_x u_{1_\zeta} -\right.$$
$$- f_x u_{1_{\zeta\zeta}} + u_{1_x}u_{1_{x\zeta}} + u_{1_y}u_{1_{y\zeta}} + u_{1_\zeta}u_{1_{\zeta\zeta}} + \left(\frac{3}{2}f_x^2 + \frac{1}{2}f_y^2\right)u_{1_{x\zeta}} +$$
$$+ f_x f_{xx} u_{1_\zeta} + f_x f_y u_{1_{y\zeta}} + f_y f_{xy} u_{1_\zeta} + +f^2 u_{1_{x\zeta}} + 2f f_x u_{1_\zeta} -$$
$$- 2f f_x u_{1_{\zeta\zeta}} - f_x u_{1_x} u_{1_{xx}} - f_y u_{1_x} u_{1_{xy}} + f_x u_{1_x} u_{1_\zeta} - -2 f_x u_{1_{x\zeta}} u_{1_\zeta} -$$
$$- f_x u_{1_x} u_{1_{\zeta\zeta}} - f_x u_{1_y} u_{1_{xy}} - f_y u_{1_y} u_{1_{yy}} + f_y u_{1_y} u_{1_\zeta} - 2 f_y u_{1_{y\zeta}} u_{1_\zeta} -$$
$$\left. - f_y u_{1_y} u_{1_{\zeta\zeta}} - 3 f u_{1\zeta} u_{1_{\zeta\zeta}}\right] - \gamma F_{mn}^2 (f_x^2 f_{xx} + 2 f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{yy}) +$$
$$+ \varepsilon(-(1-k_0)f + \gamma(f_{xx} + f_{yy} - f_x^2 f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} - f_y^2 f_{yy})), \quad \zeta = 0; \tag{2.1}$$

где $X = \{u_1, u_2, f\}$, $B = B_{mn} \colon C^{2+\alpha}(\Pi_0 \times (-\infty, 0]) \dotplus C^{2+\alpha}(\Pi_0 \times [0,1]) \dotplus C^{2+\alpha}(\Pi_0) \to C^{\alpha}(\Pi_0 \times (-\infty, 0]) \dotplus C^{\alpha}(\Pi_0 \times [0,1]) \dotplus C^{\alpha}(\Pi_0)$, $0 < \alpha < 1$, Π_0 — прямоугольник периодов в плоскости (x, y).

Представляя функцию $f(x,y)$ рядом Фурье $\sum\limits_{m,n}(a_{mn}\cos max \cos nby + b_{mn}\cos max \sin nby + c_{mn}\sin max \cos nby + d_{mn}\sin max \sin nby)$ в однородном уравнении $BX = 0$ и решая первые шесть уравнений системы методом разделения переменных, находим

$$u_1(x,y,\zeta) = \sum_{m,n} \frac{ma e^{s_{mn}\zeta}}{s_{mn}} \left(c_{mn}\cos max \cos nby + d_{mn}\cos max \sin nby - \right.$$
$$\left. - a_{mn}\sin max \cos nby - b_{mn}\sin max \sin nby\right),$$

$$u_2(x,y,\zeta) = -\sum_{m,n} \frac{ma \cosh\left(s_{mn}(\zeta-1)\right)}{s_{mn}\sinh s_{mn}} \left(c_{mn}\cos max \cos nby + \right.$$
$$\left. + d_{mn}\cos max \sin nby - a_{mn}\sin max \cos nby - b_{mn}\sin max \sin nby\right),$$

$s^2_{mn} = m^2a^2 + n^2b^2, \quad F^2_{mn} = F^2_0.$

Тогда последнее уравнение (2.1) дает дисперсионное соотношение (ДС)

$$F^2_{mn}\left(1 - k_0 + \gamma s^2_{mn}\right) = \frac{m^2a^2}{s_{mn}}\left(1 + \tilde{k}_0 \coth s_{mn} + k s_{mn}\right) \tag{2.2}$$

(m, n — положительные целые, n может быть равным нулю), справедливое для некоторых пар (m_j, n_j), $j = 1, 2, \ldots, \kappa$ таких, что базисные элементы подпространства нулей $N(B)$ линеаризованного оператора B имеют вид

$$\hat{\varphi}_{1j} = \{-v_{1j}(\zeta)\sin m_jax\cos n_jby, -v_{2j}(\zeta)\sin m_jax\cos n_jby,\\ v_{3j}\cos m_jax\cos n_jby\},$$

$$\hat{\varphi}_{2j} = \{-v_{1j}(\zeta)\sin m_jax\sin n_jby, -v_{2j}(\zeta)\sin m_jax\sin n_jby,\\ v_{3j}\cos m_jax\sin n_jby\},$$

$$\hat{\varphi}_{3j} = \{v_{1j}(\zeta)\cos m_jax\cos n_jby, v_{2j}(\zeta)\cos m_jax\cos n_jby,\\ v_{3j}\sin m_jax\cos n_jby\},$$

$$\hat{\varphi}_{4j} = \{v_{1j}(\zeta)\cos m_jax\sin n_jby, v_{2j}(\zeta)\cos m_jax\sin n_jby,\\ v_{3j}\sin m_jax\sin n_jby\},$$

где $v_{1j}(\zeta) = \dfrac{m_ja\sqrt{ab}}{\pi s_{m_jn_j}}e^{s_{m_jn_j}\zeta}$, $v_{2j}(\zeta) = -\dfrac{m_ja\sqrt{ab}\cosh\left(s_{m_jn_j}(\zeta-1)\right)}{\pi s_{m_jn_j}\sinh s_{m_jn_j}}$, $v_{3j} = \dfrac{\sqrt{ab}}{\pi}$, и возможные порядки $\dim N(B)$ представляют собой суммы четверок (двумерная решетка периодичности) и двоек (одномерная решетка).

При переходе к комплексному базису уравнение разветвления (УР) $\hat{t}(\eta, \varepsilon)$ в вещественных переменных переходит в УР в комплексных переменных [4] $\xi_{1,2} = \eta_1 \pm i\eta_2$, $\xi_{3,4} = \eta_3 \pm i\eta_4$

$$t_j(\xi, \varepsilon) = (C^{-1}\hat{t})_j(C\xi, \varepsilon), j = \overline{1,4}. \tag{2.3}$$

Соответственно

$$\varphi = C'\hat{\phi}, C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & i & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & -i & -i & i \end{pmatrix}, C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 & 1 & i \\ -i & 1 & 1 & i \\ i & -1 & 1 & i \\ -i & -1 & 1 & -i \end{pmatrix};$$

$$\varphi_{1j} = \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), v_{2j}(\zeta), -iv_{3j}\}e^{i(m_j ax+n_j by)} = \varphi_{\bar{l}_{1j}} = \\ = \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), v_{2j}(\zeta), -iv_{3j}\}e^{i\langle\bar{l}_{1j},q\rangle},$$

$$\varphi_{3j} = \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), v_{2j}(\zeta), -iv_{3j}\}e^{i(m_j ax-n_j by)} = \varphi_{\bar{l}_{3j}} = \\ = \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), v_{2j}(\zeta), -iv_{3j}\}e^{i\langle\bar{l}_{3j},q\rangle},$$

$$\varphi_{2j} = \varphi_{\bar{l}_{2j}} = \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), v_{2j}(\zeta), iv_{3j}\}e^{-i\langle\bar{l}_{1j},q\rangle},$$

$$\varphi_{4j} = \varphi_{\bar{l}_{4j}} = \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), v_{2j}(\zeta), iv_{3j}\}e^{-i\langle\bar{l}_{3j},q\rangle},$$

$$\bar{l}_{2j} = -\bar{l}_{1j}, \quad \bar{l}_{4j} = -\bar{l}_{3j}.$$

Симметричность оператора B доказывается стандартными методами [6]. Те же методы, примененные к неоднородной системе (2.1), приводят к условиям ее разрешимости, на основе которых вычисляются коэффициенты уравнения разветвления (УР). Формулы для коэффициентов первого уравнения разветвления, отвечающего двумерной j-ой решетке периодичности, имеют вид:

$$t^{(1_j)}_{\alpha;k} = -\int\limits_{\Pi_0\times(-\infty,0]} w^{(11)}_{\alpha;k} u_{1_{2_j}}\,dxdyd\zeta - \int\limits_{\Pi_0\times[0,1]} k_0 w^{(12)}_{\alpha;k} u_{2_{2_j}}\,dxdyd\zeta + \\ + \int\limits_{\Pi_0}\left[w^{(21)}_{\alpha;k}\left(u_{1_{2_j}}(x,y,0) + k\frac{\partial f_{2_j}}{\partial x}\right) - k_0 w^{(22)}_{\alpha;k} u_{2_{2_j}}(x,y,0)\right]dxdy + \\ + \int\limits_{\Pi_0} w^{(3)}_{\alpha;k} f_{2_j}\,dxdy,$$

где $w^{(j)}_{\alpha;k}$ — коэффициенты при $\xi^\alpha\varepsilon^k$ правых частей системы (2.1) в их разложении по $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ и ε при применении метода неопределенных коэффициентов Некрасова-Назарова.

Система разветвления

$$t_s(\xi,\varepsilon) \equiv a^{(s)}_0(\varepsilon)\xi_s + \sum_q a^{(s)}_q(\varepsilon)\xi_s(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2} = 0, \quad s = \overline{1,4},$$

строится стандартными методами, использующими ее групповую симметрию (инвариантов и инвариантных многообразий С.Ли–Л.В.Овсянникова). В принятой нумерации базисных элементов подпространства

N и соответствующих вершин прямоугольника $\tilde{\Pi}_0$ в обратной решетке действие группы $\tilde{G}^1$ в переменных ξ в j-ой решетке периодичности выражается подстановками

$$\xi_{k_j} : p_1 = (1_j, 2_j)(3_j, 4_j), p_2 = (1_j, 3_j)(2_j, 4_j), p_3 = (1_j, 4_j)(2_j, 3_j),$$

в то время как групповая симметрия УР в комплексных переменных — равенствами

$$(p_k t)_r(\xi, \varepsilon) = t_r(p_k \xi, \varepsilon), \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.4}$$

Действительно, преобразования элементов базиса векторов $\varphi_j = \{u_j, f_j\}$ в $N(B)$ при действии группы $\tilde{G}^1$ определяются формулами

$$p_1\varphi_j = \{p_1 u_j, -p_1 f_j\}, \quad p_2\varphi_j = \{p_2 u_j, p_2 f_j\}, \quad p_3\varphi_j = \{p_3 u_j, -p_3 f_j\},$$

где $p_1 g(x, y) = g(-x, -y)$, $p_2 g(x, y) = g(x, -y)$, $p_3 g(x, y) = g(-x, y)$. УР также наследует симметрию (2.1) относительно операции J комплексного сопряжения. Симметрия относительно двупараметрической группы сдвигов наследуется УР как инвариантность относительно двупараметрической группы вращений $A_{g(\beta)} \cong SO(2) \times SO(2)$

$$e^{i(l_r, \beta)} t_r(\xi, \varepsilon) = t_r(\ldots, \xi_{1_j} e^{i(l_{1_j}, \beta)}, \ldots, \xi_{4_j} e^{i(l_{4_j}, \beta)}, \ldots; \varepsilon), \quad r = \overline{1, n}.$$

В случае четырехмерного вырождения линеаризованного оператора B ($n = \dim N(B) = 4$):

$$t_s(\xi, \varepsilon) \equiv a_0^{(s)}(\varepsilon)\xi_s + \sum_q a_q^{(s)}(\varepsilon)\xi_s(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2} = 0, \quad s = \overline{1, 4},$$

где отношения между коэффициентами и уравнениями определяются равенствами (2.4). Эти равенства позволяют выразить все УР через первое

$$t_1(\xi, \varepsilon) \equiv A\xi_1\varepsilon + B\xi_1^2\xi_2 + C\xi_1\xi_3\xi_4 + \cdots = 0,$$

$$A = t^{(1)}_{e_1;1}, B = t^{(1)}_{2e_1+e_2;0}, C = t^{(1)}_{e_1+e_2+e_3}, e_1 = (1, 0, 0, 0), \ldots, e_4 = (0, 0, 0, 1),$$

$$t_k(\xi, \varepsilon) \equiv p_{k-1} t_1(\xi, \varepsilon) = 0, k = 2, 3, 4.$$

Последовательно находим

$$f_{e_1+e_2;0} =$$
$$= \frac{abs_{mn}}{4\pi^2(1 - k_0)} \left(\frac{(\tilde{k}_0(\coth^2 s_{mn} - 1) - 4ks_{mn})(1 - k_0 + \gamma s_{mn}^2)}{1 + \tilde{k}_0 \coth s_{mn} + ks_{mn}} + ks_{mn} \right),$$

$$u_{1_{e_1+e_2;0}} = const, u_{2_{e_1+e_2;0}} = const,$$

$$\alpha_{2e_1} = \left(1 + \frac{3}{2}\tilde{k}_0 + 2\tilde{k}_0 \frac{1+e^{4s_{mn}}}{1-e^{4s_{mn}}} \coth s_{mn} - \frac{\tilde{k}_0}{2} \coth^2 s_{mn} + \right.$$
$$\left. + 2ks_{mn} + \frac{ks_{mn}(1+\tilde{k}_0 \coth s_{mn} + ks_{mn})}{2(1-k_0+\gamma s_{mn}^2)} \right) \times$$
$$\times \left(-2 + \frac{(1-k_0+4\gamma s_{mn}^2)(1+\tilde{k}_0 \coth s_{mn})}{1-k_0+\gamma s_{mn}^2} + 2\tilde{k}_0 \frac{1+e^{4s_{mn}}}{1-e^{4s_{mn}}} - 4ks_{mn}\right)^{-1},$$

$$f_{2e_1;0} = \frac{abs_{mn}}{4\pi^2} \alpha_{2e_1} e^{2i(max+nby)},$$

$$u_{1_{2e_1;0}} = \frac{ima^2b}{4\pi^2} \left((\zeta-1)\, e^{s_{mn}\zeta} + (\alpha_{2e_1}+1)\, e^{2s_{mn}\zeta}\right) e^{2i(max+nby)},$$

$$u_{2_{2e_1;0}} = \frac{ima^2b}{4\pi^2} \left(-(\zeta-1) \frac{\sinh(s_{mn}(\zeta-1))}{\sinh s_{mn}} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{2s_{mn}\zeta} + e^{4s_{mn}} e^{-2s_{mn}\zeta}}{1-e^{4s_{mn}}} (\alpha_{2e_1} - \coth s_{mn})\right) e^{2i(max+nby)},$$

$$f_{e_1+e_3;0} = \frac{ma^2b}{2\pi^2} \alpha_{13} e^{2imax}$$

$$\alpha_{13} = \left(\frac{m^2a^2-n^2b^2}{4s_{mn}^2}\left(1-\tilde{k}_0 \coth^2 s_{mn}\right) + \frac{ma}{s_{mn}}\left(1+\tilde{k}_0 \coth[2ma] \coth s_{mn}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{4}(1-k_0) + k\frac{m^2a^2-n^2b^2}{s_{mn}}\left(\frac{1+ks_{mn}+\tilde{k}_0 \coth s_{mn}}{1-k_0+\gamma s_{mn}^2} + 1\right)\right) \times$$
$$\times \left(-1-\tilde{k}_0 \coth[2ma] + \frac{ma(1-k_0+4\gamma m^2a^2)(1+\tilde{k}_0 \coth s_{mn} + ks_{mn})}{2s_{mn}(1-k_0+\gamma s_{mn}^2)} - 2kma\right)^{-1}$$

$$u_{1_{e_1+e_3;0}} = \frac{ima^2b}{2\pi^2} \left((\zeta-1)\, e^{s_{mn}\zeta} + \left(\alpha_{13} + \frac{ma}{s_{mn}} e^{2ma\zeta}\right)\right) e^{2imax},$$

$$u_{2_{e_1+e_3;0}} = \frac{ima^2b}{2\pi^2} \left(-(\zeta-1) \frac{\sinh(s_{mn}(\zeta-1))}{\sinh s_{mn}} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{2ma\zeta} + e^{4ma} e^{-2ma\zeta}}{1-e^{4ma}} (\alpha_{e_{13}} - \coth s_{mn})\right) e^{2imax},$$

$$f_{e_1+e_4;0} = \frac{ab}{2\pi^2} \alpha_{14} e^{2inby}, \quad u_{1_{e_1+e_4;0}} = 0, \quad u_{2_{e_1+e_4;0}} = 0,$$

$$\alpha_{14} = \frac{\left(2n^2b^2 + \tilde{k}_0 \left((m^2a^2-n^2b^2) \coth s_{mn}^2 - s_{mn}^2\right) - 4ks_{mn}(m^2a^2-n^2b^2)\right)}{2s_{mn}\,(1-k_0+4\gamma n^2b^2)} \times$$
$$\times \frac{1-k_0+\gamma s_{mn}^2}{1+\tilde{k}_0 \coth s_{mn} + ks_{mn}} + \frac{k(m^2a^2-n^2b^2)}{2(1-k_0+4\gamma n^2b^2)},$$

$$f_{e_3+e_4;0} = \frac{ab}{2\pi^2}\alpha_{34}, \quad u_{1_{e_3+e_4;0}} = 0, \quad u_{2_{e_3+e_4;0}} = 0,$$

$$\alpha_{34} = \frac{s_{mn}\left(\tilde{k}_0\left(\coth s_{mn}^2 - 1\right) - 4ks_{mn}\right)\left(1 - k_0 + \gamma s_{mn}^2\right)}{2\left(1 - k_0\right)\left(1 + \tilde{k}_0 \coth s_{mn} + ks_{mn}\right)} + \frac{ks_{mn}^2}{2(1-k_0)}.$$

Ненулевые коэффициенты УР имеют вид:

$$A = -(1 - k_0 + \gamma s_{mn}^2) < 0,$$

$$B = \frac{m^2a^3b}{4\pi^2(1-k_0)}\left(\frac{s_{mn}^2(1-k_0)(1+\tilde{k}_0\coth s_{mn} + ks_{mn})}{1-k_0+\gamma s_{mn}^2}(\gamma s_{mn} - 2k\alpha_{2e_1}) + \right.$$

$$+\frac{\tilde{k}_0 s_{mn}(\coth^2 s_{mn} - 1)(1-k_0+\gamma s_{mn}^2)(-4ks_{mn} + \tilde{k}_0(\coth^2 s_{mn} - 1))}{1+\tilde{k}_0\coth s_{mn}} +$$

$$+s_{mn}\left(-2 + 2\alpha_{2e_1} + k(9 + \frac{1}{2}s_{mn} + 12s_{mn}\alpha_{2e_1})\right)(1-k_0) +$$

$$+s_{mn}(\coth^2 s_{mn} - 1)(ks_{mn} - 2\alpha_{2e_1} - \alpha_{2e_1}\cosh[2s_{mn}] + 2\coth s_{mn} -$$

$$\left. -2\sinh[2s_{mn}] + (\alpha_{2e_1}\cosh[2s_{mn}] + 2(\alpha_{2e_1} - \coth s_{mn} + \sinh[2s_{mn}]))k_0)\tilde{k}_0\right),$$

$$C = \frac{m^2a^3b}{2\pi^2 s_{mn}^2}\left(-(5m^2a^2 + 2n^2b^2)s_{mn} + 3m^2a^2 + n^2b^2 + \right.$$

$$+2ma(s_{mn} - n^2b^2)\alpha_{13} + 2n^2b^2\alpha_{14} +$$

$$+\frac{2ma(ma + s_{mn}\alpha_{13})}{(s_{mn}+2ma)^2}\left((s_{mn}+2ma)(4ma - 5m^2a^2 - n^2b^2) - 5m^2a^2 - n^2b^2\right) +$$

$$+\frac{\gamma(m^2a^2 - n^2b^2)(1+\tilde{k}_0\coth s_{mn} + ks_{mn})}{1-k_0+\gamma s_{mn}^2} + \tilde{k}_0\left[\frac{ma}{\sinh s_{mn}\sinh[2ma]}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{8ma(2ma\cosh s_{mn}\sinh[2ma] - s_{mn}\cosh[2ma]\sinh s_{mn})}{4m^2a^2 - s_{mn}^2} + \right.$$

$$+(5m^2a^2 + n^2b^2)\left(\frac{(s_{mn}+2ma)\cosh[s_{mn}+2ma] - \sinh[s_{mn}+2ma]}{(s_{mn}+2ma)^2} - \right.$$

$$\left.\left. -\frac{(s_{mn}-2ma)\cosh[s_{mn}-2ma] - \sinh[s_{mn}-2ma]}{(s_{mn}-2ma)^2}\right)\right) - 2s_{mn}^2 -$$

$$-s_{mn}\coth s_{mn}(5m^2a^2 + n^2b^2) + s_{mn}^2(\coth^2 s_{mn} - 1)(ma\alpha_{13} +$$

$$+\alpha_{14} + \alpha_{34} - 1 - \frac{s_{mn}^2}{3} - \cosh^2 s_{mn}) + 2ma\alpha_{13}(s_{mn}\coth s_{mn} -$$

$$\left. -m^2a^2\coth^2 s_{mn} + s_{mn}^2)\right] + k\left[s_{mn}(4m^3a^3 + 9m^2a^2 + 5n^2b^2) - \right.$$

$$-\frac{3}{2}m^4a^4 + \frac{5}{2}n^4b^4 - 3m^2a^2n^2b^2 + 4m^2a^2s_{mn}(s_{mn}+2ma)\alpha_{13} +$$

$$+n^2b^2s_{mn}\alpha_{14} - \frac{2s_{mn}(1+\tilde{k}_0\coth s_{mn}+ks_{mn})(m^3a^3\alpha_{13}-n^2b^2\alpha_{14})}{1-k_0+\gamma s_{mn}^2}\Bigg]\Bigg).$$

Симметрия задачи относительно L_β позволяет выполнить редукцию УР $\hat{t}(\eta,\varepsilon)=0$, полагая $\eta_2=\eta_4=0$. Тогда главная часть редуцированной системы принимает вид

$$A\eta_1\varepsilon + B\eta_1^3 + C\eta_1\eta_3^2 = 0,$$

$$A\eta_3\varepsilon + C\eta_1^2\eta_3 + B\eta_3^3 = 0.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Задача (1.1) в окрестности точки бифуркации $F_0^2 = F_{mn}^2$ – 4-кратного собственного значения, определяемого условием (2.2), имеет с точностью до преобразования $y \to -y$ два двупараметрических семейства периодических решений*

$$\begin{aligned}
&\{\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1)}, f^{(1)}\} = \\
&= \left[-\frac{A}{B}(F^2-F_{mn}^2)\right]^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{ma\sqrt{ab}}{\pi s_{mn}}e^{s_{mn}\zeta}\cos[ma(x+\beta_1)+nb(y+\beta_2)],\right.\\
&\quad -\frac{ma\sqrt{ab}\cosh(s_{mn}(\zeta-1))}{\pi s_{mn}\sinh s_{mn}}\cos[ma(x+\beta_1)+nb(y+\beta_2)],\\
&\quad \left.\frac{\sqrt{ab}}{\pi}\sin[ma(x+\beta_1)+nb(y+\beta_2)]\right\} + O\left(\left|F^2-F_{mn}^2\right|\right),\\
&\qquad sign(F^2-F_{mn}^2) = signB, \zeta = \frac{z-f^{(1)}(x,y)}{1-f^{(1)}(x,y)};
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
&\{\Phi_1^{(2)}, \Phi_2^{(2)}, f^{(2)}\} = \left[-\frac{A}{B+C}(F^2-F_{mn}^2)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\\
&\quad \cdot\left\{\frac{2ma\sqrt{ab}}{\pi s_{mn}}e^{s_{mn}\zeta}\cos[ma(x+\beta_1)]\times\cos[nb(y+\beta_2)],\right.\\
&\quad -\frac{2ma\sqrt{ab}\cosh(s_{mn}(\zeta-1))}{\pi s_{mn}\sinh s_{mn}}\cos[ma(x+\beta_1)]\cos[nb(y+\beta_2)],\\
&\quad \left.\frac{2\sqrt{ab}}{\pi}\sin[ma(x+\beta_1)]\cos[nb(y+\beta_2)]\right\} + O\left(\left|F^2-F_{mn}^2\right|\right),\\
&\qquad sign(F^2-F_{mn}^2) = sign(B+C), \zeta = \frac{z-f^{(2)}(x,y)}{1-f^{(2)}(x,y)}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

3. Высокие вырождения

А. $n_1 = n_2 = 0$, $n = \dim N(B) = 4$. Докажем возможность существования физических параметров, при которых существует решение с симметрией двух вырожденных решеток. Пусть ДС выполнено для двух пар $(m_1, 0)$ и $(m_2, 0)$: $F^2_{mn}(1 - k_0 + \gamma m^2 a^2) = ma(1 + \tilde{k}_0 \coth ma + kma)$. Разделив первое уравнение на второе, получим выражение для k:

$$k = \frac{(1 - k_0 + \gamma m_1^2 a^2)(1 - k_0 + \gamma m_2^2 a^2)}{(m_2^2 a^2 - m_1^2 a^2)(1 - k_0)} \times \\ \times \left[\frac{m_1 a(1 + \tilde{k}_0 \coth m_1 a)}{1 - k_0 + \gamma m_1^2 a^2} - \frac{m_2 a(1 + \tilde{k}_0 \coth m_2 a)}{1 - k_0 + \gamma m_2^2 a^2} \right].$$

Положим $m_2 > m_1$ и $f(x) = \dfrac{x(1 + \tilde{k}_0 \coth x)}{1 - k_0 + \gamma x^2}$, где $x = ma$. Тогда

$$f' = \frac{\sinh^2 x(1 + \tilde{k}_0 \coth x)(1 - k_0 - \gamma x^2) - \tilde{k}_0 x(1 - k_0 + \gamma x^2)}{\sinh^2 x(1 - k_0 + \gamma x^2)^2}$$

и $f' < 0$ при $\gamma x^2 > 1 - k_0$ — условие существования двух вырожденных решеток периодичности.

Группе сдвигов по координате x отвечает однопараметрическая группа вращений-отражений в пространстве векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ с диагональной матрицей $A(\beta) = diag\{e^{im_1 a\beta}, e^{-im_1 a\beta}, e^{im_2 a\beta}, e^{-im_2 a\beta}\}$.

Здесь $(m_1, 0)$ и $(m_2, 0)$ удовлетворяют дисперсионному соотношению (2.2). Группе $A(\beta)$ отвечает базисный инфинитезимальный оператор ($\partial_{\xi_k} I = \partial I / \partial \xi_k$) $X = \left\{ \hat{X}(\xi), \hat{X}(t) \right\}$, $\hat{X}(\xi) = m_1 a\,(-\xi_1 \partial_{\xi_1} I + \xi_2 \partial_{\xi_2} I) + m_2 a\,(-\xi_3 \partial_{\xi_3} I + \xi_4 \partial_{\xi_4} I)$.

Дифференциальное уравнение $XI(\xi, t) = 0$ определяет полную систему семи функционально независимых инвариантов $I_s(\xi, t) = \frac{t_s}{\xi_s}$, $s = \overline{1, 4}$, $I_5(\xi) = \xi_1 \xi_2$, $I_6(\xi) = \xi_3 \xi_4$, $I_7(\xi) = \xi_1^{N/m_1} \xi_4^{N/m_2}$, где N – наименьшее общее кратное (НОК) чисел m_1 и m_2.

Согласно теореме Л.В. Овсянникова получаем общий вид УР рассматриваемой задачи. Мы предполагаем УР аналитическим или достаточно гладким, поэтому при использовании построенной полной системы функционально независимых инвариантов некоторые мономиальные слагаемые в УР могут отсутствовать. Необходимо привлечь дополнительный инвариант $I_8 = \xi_2^{\frac{N}{m_1}} \xi_3^{\frac{N}{m_2}}$. Тогда в УР возникают повторяющиеся слагаемые и нужно провести факторизацию по связи между инвариантами $I_7(\xi) I_8(\xi) = I_5^{\frac{N}{m_1}}(\xi) I_6^{\frac{N}{m_2}}(\xi)$. Эта факторизация обозначается символом $[...]^{out}$. Таким образом, УР принимает вид

$$t_k(\xi,\varepsilon)\equiv$$
$$\equiv a_0^{(k)}(\varepsilon)\xi_k+\sum_q a_q^k(\xi)(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2}\left[\xi_k\left(\xi_1^{\frac{N}{m_1}}\xi_4^{\frac{N}{m_2}}\right)^{q_3}\left(\xi_2^{\frac{N}{m_1}}\xi_3^{\frac{N}{m_2}}\right)^{q_4}\right]^{out}=0,$$

$k=\overline{1,4}$, где символ $[...]^{out}$ означает, что в выражении внутри скобки сомножители вида $\xi_{2k-1}\xi_{2k}$ должны быть опущены.

В частности, для взаимно простых m_1 и m_2 главная часть УР принимает вид

$$A\xi_1\varepsilon+B\xi_2^{m_2-1}\xi_3^{m_1}+\dots=0,\quad A\xi_2\varepsilon+B\xi_1^{m_2-1}\xi_4^{m_1}+\dots=0,$$
$$C\xi_3\varepsilon+D\xi_1^{m_2}\xi_4^{m_1-1}+\dots=0,\quad C\xi_4\varepsilon+D\xi_2^{m_2}\xi_3^{m_1-1}+\dots=0,$$

и определяет при конкретных m_1, m_2 асимптотику малых однопараметрических семейств решений.

B. $n=\dim N(B)=6$. Существование трех вырожденных решеток периодичности ($n_1=n_2=n_3=0$) невозможно. Действительно, пусть $m_1<m_2<m_3$ и $am_k=s_k$. Тогда

$$\frac{s_1(1+\tilde{k}_0\coth s_1+ks_1)}{(1-k_0+\gamma s_1^2)}=\frac{s_2(1+\tilde{k}_0\coth s_2+ks_2)}{(1-k_0+\gamma s_2^2)}=\frac{s_3(1+\tilde{k}_0\coth s_3+ks_3)}{(1-k_0+\gamma s_3^2)},$$

откуда $\gamma=-\dfrac{1-k_0}{s_1^2}<0$, что противоречит положительности γ. Правильная гексагональная решетка периодичности также невозможна. Мы можем записать два последовательных поворота на угол $\pi/3$ в виде $m_1ax+m_1a\sqrt{3}y\Rightarrow -m_1ax+\sqrt{3}m_1ay\Rightarrow -m_1a(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y)+\sqrt{3}m_1a(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}y)=-2m_1ax$, и предположение $s_1^2=m_1^2a^2+3m_1^2a^2=4m_1^2a^2=s_2^2$ неверно.

Существование неправильной гексагональной, а также двух 4-мерных решеток периодичности следует из непрерывной зависимости ДС относительно k.

При $\dim N(B)=6$ один из прямоугольников периодов вырождается в отрезок. Базис $\{\varphi_i\}_1^6$ подпространства нулей нумеруется векторами $\bar{l}(m_i,n_i)=m_i\bar{l}^{(1)}+n_i\bar{l}^{(2)}$ обратной решетки: $\varphi_k=\varphi_{\bar{l}_k(m,n)}$ ($\bar{l}^{(1)}=a\bar{e}_1$, $l^{(2)}=b\bar{e}_2$), $\bar{l}_1=\bar{l}_1(m_1,n_1)=m_1\bar{l}_1+n_1\bar{l}_2$, $\bar{l}_3=m_1\bar{l}_1-n_1\bar{l}_2$, $\bar{l}_5=\bar{l}_5(m_2,0)=m_2\bar{l}_1$, $\bar{l}_{2j}=-\bar{l}_{2j-1}$. В такой нумерации базисных элементов и отвечающих им вершин $(\pm m_1,\pm n_1)$ и $(\pm m_2,0)$ соответствующих прямоугольников Π_{01} и Π_{02} в обратной решетке действие группы $\tilde{G}^1$ симметрии прямоугольника выражается подстановкой индексов переменных ξ_k, а групповая инвариантность УР относительно $\tilde{G}^1$ — равенствами типа (2.4). Эти равенства вместе с инвариантностью относительно операции

J комплексного сопряжения позволяют выразить уравнения системы через первое и пятое. Для построения этих уравнений используем инвариантность УР относительно двумерной группы сдвигов $e^{i(\bar{l}_k,\beta)}t_k(\xi,\varepsilon) = t_k(\xi_1 e^{i(\bar{l}_1,\beta)},\dots,\xi_6 e^{i(\bar{l}_6,\beta)},\varepsilon)$. Тогда коэффициент $t^{(k)}_{\alpha;j}$ при ξ^α в k-ом уравнении может быть отличен от нуля, если выполнено равенство $\bar{l}_k = \alpha_1\bar{l}_1+\dots+\alpha_6\bar{l}_6, |\alpha| = r$.

Рассмотрим такой случай шестимерного ветвления, когда взаимодействие решеток происходит на первом шаге, т.е. имеют место соотношения: $\bar{l}_1 = \bar{l}_4+\bar{l}_5, \bar{l}_3 = \bar{l}_2+\bar{l}_5, \bar{l}_5 = \bar{l}_1+\bar{l}_3, \bar{l}_2 = \bar{l}_3+\bar{l}_6, \bar{l}_4 = \bar{l}_1+\bar{l}_6, \bar{l}_6 = \bar{l}_2+\bar{l}_4, m_2 = 2m_1$.

Аналогично предыдущему пункту определяем систему функционально независимых инвариантов, получаем УР, главная часть которого имеет вид

$$\begin{gathered} A\xi_1\varepsilon + iB\xi_4\xi_5 = 0, \quad A\xi_3\varepsilon + iB\xi_2\xi_5 = 0, \quad C\xi_5\varepsilon + iD\xi_1\xi_3 = 0, \\ A\xi_2\varepsilon - iB\xi_3\xi_6 = 0, \quad A\xi_4\varepsilon - iB\xi_1\xi_6 = 0, \quad C\xi_6\varepsilon - iD\xi_2\xi_4 = 0, \end{gathered}$$

где $A = a^1_{01}$, $C = a^2_{01}$, $iB = a^{(1;1)}_{0;1}$, $iD = a^{(2;1)}_{0;1}$, A, B, C, D — вещественны.

Главная часть УР в вещественных переменных принимает вид

$$\begin{aligned} A\eta_1\varepsilon + B(\eta_1\eta_5+\eta_3\eta_6) = 0, &\quad A\eta_2\varepsilon + B(\eta_2\eta_5+\eta_4\eta_6) = 0, \\ A\eta_3\varepsilon + B(\eta_1\eta_6-\eta_3\eta_5) = 0, &\quad A\eta_4\varepsilon + B(\eta_2\eta_6-\eta_4\eta_5) = 0, \\ C\eta_5\varepsilon + \frac{1}{4}D(-\eta_1^2-\eta_2^2+\eta_3^2+\eta_4^2) = 0, &\, C\eta_6\varepsilon + \frac{1}{2}D(-\eta_1\eta_3-\eta_2\eta_4) = 0. \end{aligned}$$

Выполняя редукцию УР, положив $\eta_2 = 0 = \eta_3$, приходим к системе разветвления, имеющей 4 решения. Комбинации сдвигов по координате x на $\frac{\pi}{2m_1a}, \frac{\pi}{m_1a}$ и по координате y на $\frac{\pi}{2n_1b}, \frac{\pi}{n_1b}$, индуцированные группой сдвигов L_β при соответствующих значениях $\beta = (\beta_1,\beta_2)$, индуцируют преобразования $\{\eta_1\to\eta_4,\ \eta_4\to\eta_1,\ \eta_5\to-\eta_5\}$, $\{\eta_1\to-\eta_1,\ \eta_5\to\eta_5\}$, $\{\eta_4\to-\eta_4,\ \eta_5\to\eta_5\}$, которые оставляют только одно решение $\left(2\sqrt{-\frac{AC}{BD}}\varepsilon,0,0,0,-\frac{A}{B}\varepsilon,0\right)$.

Принимая во внимание знаки A и C и неравенство $signBD < 0$, получаем теорему.

Теорема 2. *Задача (1.1) в случае двух взаимодействующих решеток периодичности в окрестности точки бифуркации $F_0^2 = F^2_{m_1n_1} = F^2_{m_20}$ шестимерного вырождения линеаризованного оператора имеет одно двупараметрическое семейство периодических решений*

$$\begin{aligned} \{\Phi_1^{(1)},\Phi_2^{(1)},f^{(1)}\} = 2\left[-\frac{AC}{BD}\right]^{\frac{1}{2}}(F^2-F_0^2)\times \\ \times\left\{-\frac{m_1a\sqrt{ab}}{\pi s_{m_1n_1}}e^{s_{m_1n_1}\zeta}\sin[m_1a(x+\beta_1)]\times\cos[n_1b(y+\beta_2)],\right. \end{aligned}$$

$$\frac{m_1 a\sqrt{ab}\cosh\left(s_{m_1n_1}(\zeta-1)\right)}{\pi s_{m_1n_1}\sinh s_{m_1n_1}}\sin[m_1a(x+\beta_1)]\cos[n_1b(y+\beta_2)],$$

$$\left.\frac{\sqrt{ab}}{\pi}\cos[m_1a(x+\beta_1)]\cos[n_1b(y+\beta_2)]\right\}-\frac{A}{B}(F^2-F_0^2)\left\{-\frac{\sqrt{ab}}{\pi}e^{m_2a\zeta}\times\right.$$

$$\times\sin[m_2a(x+\beta_1)],\frac{\sqrt{ab}\cosh\left(m_2a(\zeta-1)\right)}{\pi\sinh m_2a}\sin[m_2a(x+\beta_1)],$$

$$\left.\frac{\sqrt{ab}}{\pi}\cos[m_2a(x+\beta_1)]\right\}+o\left(\left|F^2-F_0^2\right|\right),\zeta=\frac{z-f^{(1)}(x,y)}{1-f^{(1)}(x,y)}.$$

C. $n=\dim N(B)=4+4$. Находим систему функционально независимых инвариантов, выписываем общий вид УР. Симметрия группы прямоугольника выражается подстановками индексов переменных ξ_k: $p_1=(12)(34)(56)(78)$, $p_2=(13)(24)(57)(68)$, $p_3=(14)(23)(58)(67)$, а соответствующая групповая симметрия УР — равенствами типа (2.4). Эти равенства позволяют выразить все уравнения через первое и пятое и дают симметрию коэффициентов УР.

$$\begin{aligned}t_1(\xi,\varepsilon) &= A\xi_1\varepsilon+B\xi_1^2\xi_2+C\xi_1\xi_3\xi_4+D\xi_1\xi_5\xi_6+E\xi_1\xi_7\xi_8=0,\\ t_5(\xi,\varepsilon) &= F\xi_5\varepsilon+G\xi_5^2\xi_6+H\xi_5\xi_7\xi_8+K\xi_1\xi_2\xi_5+L\xi_3\xi_4\xi_5=0.\end{aligned}$$

Переходя к вещественному базису в $N(B)$, выполняя редукцию соответствующего УР ($\eta_2=\eta_3=0$), получаем решения.

D. $n=\dim N(B)=4+2+2$. Предположим, что взаимодействие решеток периодичности осуществляется на первом шаге. Это возможно, например, если векторы обратной решетки удовлетворяют соотношениям $l_1=l_4+l_5, l_2=l_3+l_6, l_3=l_2+l_5, l_4=l_1+l_6, l_7=2l_5, l_8=2l_6$. Существование такой ситуации можно доказать, используя ДС для решеток (m_1,n_1), $(2m_1,0)$, $(4m_1,0)$. Симметрия относительно дискретной группы позволяет выразить уравнения системы разветвления через первое, пятое и седьмое и, тем самым, устанавливает связи между коэффициентами $a_q^{(k)}(\varepsilon)$ УР. Переходя к вещественному базису в $N(B)$ по формулам типа (2.3), выполняя редукцию соответствующего УР, получаем систему:

$$A\eta_1\varepsilon+B\eta_1\eta_5=0,\quad B\eta_4\eta_6=0,\quad B\eta_1\eta_6=0,\quad A\eta_4\varepsilon-B\eta_4\eta_5=0,$$
$$C\eta_5\varepsilon+\frac{D}{2}(\eta_4^2-\eta_1^2)+E(\eta_5\eta_7+\eta_6\eta_8)=0,\quad C\eta_6\varepsilon+E(\eta_5\eta_8-\eta_6\eta_7)=0,$$
$$F\eta_7\varepsilon+G(\eta_6^2-\eta_5^2)=0,\quad F\eta_8\varepsilon+2G\eta_5\eta_6=0,$$

которая имеет 5 решений, из которых существенными являются только три.

4. Критерии устойчивости решений задачи о волнах на флотирующей границе раздела двух жидкостей

A. 4-мерное вырождение. Редуцированная устойчивость семейств разветвляющихся решений соответствующей (1.1) нестационарной задачи определяется [5] устойчивостью стационарных решений уравнения $\dfrac{d\eta}{dt} = t(\eta, \varepsilon)$, где $t(\eta, \varepsilon)$ — левая часть системы разветвления, $\varepsilon = F^2 - F_{mn}^2$. Устойчивость же последних определяется знаками собственных значений матрицы Якоби $J = \left[\dfrac{\partial \bar{t}_i}{\partial \eta_j}\right]$ на этих решениях.

Теорема 3. *Для того, чтобы семейство решений (2.5) было устойчивым необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$sign\varepsilon = signB = sign(\tilde{B} + \tilde{C}) = -1$$

$$\begin{cases} \tilde{B} + \tilde{C} < 0 \\ \tilde{C} - \tilde{B} > 0 \end{cases} <=> 0 < \frac{|\tilde{C}|}{|\tilde{B}|} < 1 \tag{4.1}$$

Действие оператора $L_{\beta_1\beta_2}$ на произвольный элемент $N(B_{mn})$ равносильно преобразованию его координат в разложении по базису подпространства нулей с помощью матрицы A_g ($f_1(\beta_1, \beta_2) = \cos ma\beta_1 \cos nb\beta_2$, $f_2(\beta_1, \beta_2) = \cos ma\beta_1 \sin nb\beta_2$, $f_3(\beta_1, \beta_2) = \sin ma\beta_1 \cos nb\beta_2$, $f_4(\beta_1, \beta_2) = \sin ma\beta_1 \sin nb\beta_2$)

$$A_g = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \begin{pmatrix} f_1(\beta_1,\beta_2) & f_2(\beta_1,\beta_2) & f_3(\beta_1,\beta_2) & f_4(\beta_1,\beta_2) \\ -f_2(\beta_1,\beta_2) & f_1(\beta_1,\beta_2) & -f_4(\beta_1,\beta_2) & f_3(\beta_1,\beta_2) \\ -f_3(\beta_1,\beta_2) & -f_4(\beta_1,\beta_2) & f_1(\beta_1,\beta_2) & f_2(\beta_1,\beta_2) \\ f_4(\beta_1,\beta_2) & -f_3(\beta_1,\beta_2) & -f_2(\beta_1,\beta_2) & f_1(\beta_1,\beta_2) \end{pmatrix}.$$

С помощью матрицы A_g определяется семейство решений

$$\tilde{\eta} = A_g \tilde{\eta}_0(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} (f_1(\beta_1,\beta_2), -f_2(\beta_1,\beta_2), -f_3(\beta_1,\beta_2), f_4(\beta_1,\beta_2))^T \cdot$$
$$\cdot \left(-\frac{A}{B}\varepsilon\right)^{1/2} + o(|\varepsilon|^{1/2}), \tilde{\eta}_0(\varepsilon) = (1,0,0,0)^T \left(-\frac{A}{B}\varepsilon\right)^{1/2} + o(|\varepsilon|^{1/2}),$$

где $\tilde{\eta}_0(\varepsilon)$ — решение редуцированного УР.

В соответствии с определением линейного касательного многообразия должны быть выполнены соотношения

$$t_\eta(\tilde{\eta}_0(\varepsilon), \varepsilon) \left[\Lambda_i \tilde{\eta}_0(\varepsilon)\right] = 0, i = 1, 2 \tag{4.2}$$

где Λ_i — инфинитезимальные операторы алгебры Ли в Ξ_φ^4.

$t_\eta(\tilde\eta_0(\varepsilon),\varepsilon) = diag\left\{A\varepsilon - 3A\varepsilon, 0, 0, A\varepsilon - \frac{CA}{B}\varepsilon\right\}, \Lambda_1\tilde\eta_0(\varepsilon) = \frac{\partial A_\beta}{\partial\beta_1}|_{\beta_1=\beta_2=0}\cdot$ $\tilde\eta_0(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}(0,0,-ma,0)^T\left(-\frac{A}{B}\varepsilon\right)^{1/2}, \Lambda_2\tilde\eta_0(\varepsilon) = \frac{\partial A_\beta}{\partial\beta_2}|_{\beta_1=\beta_2=0}\cdot\tilde\eta_0(\varepsilon) =$ $\frac{\pi}{\sqrt{ab}}(0,-nb,0,0)^T\left(-\frac{A}{B}\varepsilon\right)^{1/2}$.

Соотношения (4.2) выполнены и устойчивость ответвляющихся решений $A_\beta\tilde\eta_0(\varepsilon)$ определяется знаками главных членов по ε собственных значений матрицы Якоби J на этом решении, которые имеют вид ($\tilde B = B + C$, $\tilde C = 3B - C$) $\nu_{1,2} = 0$, $\nu_3 = -2A\varepsilon$, $\nu_4 = \frac{2A\varepsilon}{\tilde B + \tilde C}(\tilde C - \tilde B)$.

Рассмотрим вторую группу решений.

Теорема 4. *Для того, чтобы семейство решений (2.6) было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$sign\varepsilon = sign(B + C) = sign\tilde B = -1$$

$$0 < \frac{|\tilde B|}{|\tilde C|} < 1 \tag{4.3}$$

Для второй группы решений выполняются равенства (4.2), где

$$t_\eta(\tilde\eta_0(\varepsilon),\varepsilon) = \begin{pmatrix} -2B & 0 & -2C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2C & 0 & -2B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{A}{B+C}\varepsilon,$$

$\Lambda_1\tilde\eta_0(\varepsilon) = \frac{\partial A_\beta}{\partial\beta_1}|_{\beta_1=\beta_2=0}\cdot\tilde\eta_0(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}(ma,0,-ma,0)^T\left(-\frac{A}{B+C}\varepsilon\right)^{1/2}$, $\Lambda_2\tilde\eta_0(\varepsilon) = \frac{\partial A_\beta}{\partial\beta_2}|_{\beta_1=\beta_2=0}\cdot\tilde\eta_0(\varepsilon) = = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}(0,-nb,0,-nb)^T\left(-\frac{A}{B+C}\varepsilon\right)^{1/2}$, $\tilde\eta_0(\varepsilon) = (1,0,1,0)^T\left(-\frac{A}{B+C}\varepsilon\right)^{1/2} + o(|\varepsilon|^{1/2})$ ($\tilde\eta_0(\varepsilon)$ — решение редуцированного УР), и главные части собственных значений матрицы Якоби J на этих решениях имеют вид: $\nu_{1,2} = 0$, $\nu_3 = -2A\varepsilon$, $\nu_4 = \frac{2A\varepsilon}{B+C}(C - B)$.

Замечание 1. При выполнении неравенства (4.1) ((4.3)) семейство решений (2.5)((2.6)), будет устойчиво относительно возмущений с той же симметрией, а неустойчивость относительно возмущений с той же симметрией означает неустойчивость вообще.

Придавая значения параметрам nb, ma, мы определяем $\frac{|\tilde C|}{|\tilde B|}$. Результаты для первой группы решений представлены в таблице 1 (для $\gamma =$

0.3, $k = 0.9$, $k_0 = 0.8$, $\tilde{k}_0 = 0.85$), где решения (2.5) неустойчивы, а решения (2.6) — неустойчивы:

Таблица 1.

nb	ma	$\lvert\tilde{C}\rvert/\lvert\tilde{B}\rvert$	nb	ma	$\lvert\tilde{C}\rvert/\lvert\tilde{B}\rvert$	nb	ma	$\lvert\tilde{C}\rvert/\lvert\tilde{B}\rvert$
0,1	1,1	0,999	0,3	1,2	0,496	0,5	1,2	0,014
0,1	1,2	0,722	0,3	1,3	0,125	0,5	1,3	0,319
0,1	1,3	0,348	0,3	1,4	0,217	0,5	1,4	0,584
0,1	1,4	0,027	0,3	1,5	0,531	0,5	1,5	0,822
0,1	1,5	0,387	0,3	1,6	0,818	0,5	1,6	0,496
0,1	1,6	0,726	0,4	1,1	0,682	0,6	1,0	0,392
0,2	1,1	0,970	0,4	1,2	0,277	0,6	1,1	0,060
0,2	1,2	0,642	0,4	1,3	0,072	0,6	1,2	0,362
0,2	1,3	0,265	0,4	1,4	0,381	0,6	1,3	0,604
0,2	1,4	0,098	0,4	1,5	0,660	0,6	1,4	0,815
0,2	1,5	0,440	0,4	1,6	0,913	0,7	1,0	0,235
0,2	1,6	0,757	0,5	1,0	0,892	0,7	1,1	0,531
0,3	1,1	0,878	0,5	1,1	0,362	0,7	1,2	0,734

Результаты для второй группы решений содержатся в таблице 2, где решения (2.6) устойчивы, в то время как решения (2.5) неустойчивы:

Таблица 2.

nb	ma	$\lvert\tilde{B}\rvert/\lvert\tilde{C}\rvert$	nb	ma	$\lvert\tilde{B}\rvert/\lvert\tilde{C}\rvert$	nb	ma	$\lvert\tilde{B}\rvert/\lvert\tilde{C}\rvert$
0,1	0,1	0,333	0,2	0,4	0,332	0,4	0,3	0,344
0,1	0,2	0,329	0,2	0,5	0,355	0,4	0,4	0,355
0,1	0,3	0,325	0,2	0,6	0,540	0,4	0,5	0,463
0,1	0,4	0,326	0,2	0,7	0,282	0,4	0,6	0,237
0,1	0,5	0,345	0,3	0,1	0,341	0,5	0,3	0,394
0,1	0,6	0,467	0,3	0,2	0,337	0,5	0,4	0,405
0,1	0,7	0,767	0,3	0,3	0,336	0,5	0,6	0,902
0,1	0,8	0,017	0,3	0,4	0,340	0,5	0,8	0,232
0,2	0,1	0,335	0,3	0,5	0,377	0,6	0,8	0,155
0,2	0,2	0,334	0,3	0,7	0,042	0,6	0,9	0,731
0,2	0,3	0,331	0,4	0,2	0,350	0,7	0,8	0,369

B. 6-мерное вырождение. Собственные значения матрицы Якоби главной части УР имеют вид $\nu_{1,2,3,4} = 0, \nu_{3,4} = \frac{C\varepsilon \pm \sqrt{C^2\varepsilon^2 + 4AC\varepsilon^2}}{2}$ и, поскольку одно из собственных значений положительно, ответвившееся семейство решений является неустойчивым.

C. $\dim N(B) = 4 + 2 + 2$. Исследование выражений для собственных значений матрицы Якоби на решениях в случае трех решеток периодичности показывает, что два семейства решений исходной задачи неустойчивы и одно устойчиво.

Список литературы

1. Андронов, А. Н. Об устойчивости разветвляющихся решений задачи о поверхностных волнах на горизонтальной границе раздела двух жидкостей, нижняя из которых занимает полупространство / А.Н. Андронов // Известия вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. – 2009. – № 3(11). – С. 11–20.
2. Андронов, А. Н. Об устойчивости разветвляющихся семейств решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах в глубоком пространственном слое флотирующей жидкости / А.Н. Андронов // Вестник Самарского государственного университета. – 2009. – №2(68). – С. 10–26.
3. Логинов, Б. В. Бифуркация и симметрия в задачах о капиллярно-гравитационных волнах / Б.В. Логинов // Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42. № 4. – С. 868–887.
4. Логинов, Б. В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности / Б. В. Логинов. – Ташкент: Фан, 1985.
5. Loginov, B. V. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions / B. V. Loginov, Yu. B. Roussak // Nonlinear Analysis. – 1991. – TMA, 17, № 3. – P. 219–231.
6. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М.: Наука, 1969.

A. N. Andronov

Asymptotics and stability of bifurcating solutions to the problem about the floating interface of two fluids

Abstract. The asymptotics of bifurcating solutions in the case higher degenerations of linearized operator in the problem on capillary-gravity waves at the interface between two fluids is obtained. Group analysis methods in bifurcation theory under the group invariance conditions are applied. Criteria to the reduced stability of the bifurcating solutions are found.

Keywords: bifurcation theory; group invariance; capillary-gravity waves; reduced stability

Андронов Артем Николаевич, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, 430005, Саранск, ул. Большевистская, 68. (arbox@inbox.ru)

Artyom Andronov, Mordovian State University, 68, Bolshevistskaya St., Saransk, 430005 (arbox@inbox.ru)