



УДК 517.9

Задача оптимального измерения: численное решение, алгоритм программы

А. В. Келлер

Южно-Уральский государственный университет

Е. И. Назарова

Южно-Уральский государственный университет

Аннотация. Рассмотрен алгоритм численного решения задачи динамического измерения как задачи жесткого оптимального управления, описана блок-схема программы, реализующей алгоритм, и блок-схемы основных процедур, приведен пример численного решения задачи для конкретной модели датчика.

Ключевые слова: численное решение; оптимальное измерение; задача оптимального управления; алгоритм программы.

1. Задача оптимального измерения

Динамические измерения приобретают все большее распространение в технике и научных исследованиях. Изменение требований к результатам измерений является следствием выдвигаемых требования к качеству испытаний и эффективности производства. Так, одной из наиболее значимых в теории динамических измерений является проблема восстановления измеряемого сигнала.

Пусть $\aleph = \{x \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}$ – пространство состояний, $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}$ – пространство измерений и $\mathfrak{Y} = C[\aleph]$ – пространство наблюдений при некотором фиксированном $\tau \in \mathbb{R}^+$. Выделим в \mathfrak{U} замкнутое и выпуклое подмножество \mathfrak{U}_δ – множество допустимых измерений и поставим задачу оптимального управления. Требуется найти пару $(y, v) \in \mathfrak{Y} \times \mathfrak{U}_\delta$ почти всюду на $(0, \tau)$, удовлетворяющую уравнениям

$$L\dot{x} = Mx + Du, \quad (1.1)$$

$$y = Nx, \quad (1.2)$$

при начальных условиях Шоултера – Сидорова

$$\left[(\mu L - M)^{-1} L \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0, \quad (1.3)$$

минимизирующую значение функционала

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\theta} \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| y^{(q)}(t) - y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt, \quad (1.4)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния измерительного устройства соответственно; $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – вектор-функции измерений и наблюдений измерительного устройства соответственно; $y_0(t) = (y_{01}(t), y_{02}(t), \dots, y_{0n}(t))$ – наблюдение, полученное в ходе натурального эксперимента; $\| \cdot \|$ – евклидова норма пространства \mathbb{R}^n ; $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(M)$; n – число параметров состояний системы; L и M – квадратные матрицы порядка n , представляющие собой взаимовлияние скоростей состояния и состояния измерительного устройства соответственно, причем, в общем случае $\det L = 0$, матрица M – (L, p) -регулярна [2], $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, D и N – квадратные матрицы порядка n , характеризующие взаимовлияние параметров измерения и связь между состоянием системы и наблюдением соответственно.

В общем случае задача (1.1)–(1.3) имеет широкий спектр практического применения в различных областях науки и техники, в частности, система уравнений (1.1), (1.2) описывает модель датчика. Использовать данную систему в теории динамических измерений впервые было предложено А. Л. Шестаковым [7]. Эта модель оказалась применима для широкого круга измеряемых явлений [5, 9, 11]. В [10] А. Л. Шестаков и Г. А. Свиридюк впервые применили методы фазового пространства и теории вырожденных групп [12] к решению задачи (1.1)–(1.3). Разработанный на основе этих методов алгоритм численного решения задачи (1.1)–(1.3) позволяет находить значение выходного сигнала $y = y(t)$ по входному $u = u(t)$ [3].

Однако наибольший интерес представляет решение обратной задачи, т. е. вычисление значения измеряемой величины по наблюдаемому значению. Исходя из этого в [8] было предложено исследовать задачу нахождения измерения $u = u(t)$ по наблюдению $y = y(t)$ методами теории оптимального управления. Чем ближе значение выходного сигнала к выходному сигналу модели датчика, тем точнее значение восстанавливаемого сигнала, таким образом, искомое измерение минимизирует функционал (1.4). Вследствие этого, задачу (1.1)–(1.4) назовем *задачей оптимального измерения*.

2. Алгоритм численного решения задачи оптимального измерения

Задача (1.1)–(1.4) в гильбертовых пространствах и в более общей постановке (в частности, требовалось еще найти вектор состояний $x(t)$) рассматривалась в [6] как *задача жесткого оптимального управления*. Поэтому без доказательства приведем результат, почерпнутый из [6] и адаптированный к рассматриваемой нами задаче.

Теорема 1. Пусть матрица M (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, причем $\det M \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $(y, v) \in \mathfrak{Y} \times \mathfrak{U}_\partial$ задачи (1.1)–(1.4), где $y = Nx$, а

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[- \sum_{q=0}^p H^q M^{-1} (\mathbb{I}_n - Q) (Du)^{(q)}(t) + U^t x_0 + \int_0^t R^{t-s} Q (Du(s)) ds \right], \quad (2.1)$$

где $H = M^{-1} (\mathbb{I}_n - Q) L$ – нильпотентная матрица со степенью нильпотентности p ,

$$U^t = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)}, \quad Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(k L_k^L(M) \right)^{p+1},$$

$$R^t = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)-1} \left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1}.$$

Заметим, что по построению пространство \mathfrak{U} сепарабельно, значит, существует последовательность $\{\mathfrak{U}^l\}$ конечномерных подпространств $\mathfrak{U}^l \subset \mathfrak{U}$ монотонно исчерпывающих пространство \mathfrak{U} , т.е. $\mathfrak{U}^l \subset \mathfrak{U}^{l+1}$ и $\bigcup_{l=1}^{\infty} \mathfrak{U}^l$ плотно в \mathfrak{U} , $\dim \mathfrak{U}^l = (l+1) \times n$. Поэтому приближенное значение входящего сигнала $u_k^l = u_k^l(t)$ будем искать в следующем виде

$$u_k^l(t) = \text{col} \left(\sum_{j=0}^l a_{1j} t^j, \sum_{j=0}^l a_{2j} t^j, \dots, \sum_{j=0}^l a_{nj} t^j \right), \quad (2.2)$$

где $l \in \mathbb{N}$, $l > p$.

Пусть матрица M (L, p) -регулярна, причем $\det M \neq 0$, тогда по теореме 1

$$x_k(t) = - \sum_{q=0}^p H_k^q M^{-1} (\mathbb{I}_n - Q_k) (Du_k^l)^{(q)}(t) + U_k^t x_0 + \sum_{j=0}^m R_k^{T-s_j} Q_k Du_k^l(s_j) \Delta c_j, \quad (2.3)$$

где s_j и c_j – узлы и веса квадратурной формулы Гаусса соответственно, $s_j \in [0, T]$, $j = \overline{0, m}$, $m + 1$ – количество узлов, $H_k = M^{-1} (\mathbb{I}_n - Q_k) L$ – нильпотентная матрица со степенью нильпотентности p ,

$$U_k^t = \left(\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)}, \quad Q_k = \left({}_k L_k^L(M) \right)^{p+1},$$

$$R_k^{T-s_j} = \left(\left(L - \frac{T-s_j}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)-1} \left(L - \frac{T-s_j}{k(p+1)} M \right)^{-1}.$$

Функционал J^l , заданный на конечномерном пространстве, изоморфном \mathfrak{U}^l , непрерывен на \mathfrak{U}^l по построению, поэтому в силу т. Вейерштрасса он будет иметь минимум на \mathfrak{U}_∂^l . Подставив коэффициенты найденного минимума в (2.2), получим u_k^l , затем подставив u_k^l в (2.3) и, умножив на матрицу N , получим y_k . Найденная таким образом пара (y_k, u_k^l) является приближенным решением задачи (1.1)–(1.4).

Теорема 2. Пусть матрица M (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\det M \neq 0$. Пусть множество допустимых измерений \mathfrak{U}_∂ замкнуто, выпукло и ограничено. Тогда последовательность приближенных решений $\{(y_k, u_k^l)\}$, $l > p$, сходится при $k, l \rightarrow \infty$ к точному решению (y, v) в норме пространства $\mathfrak{Y} \times \mathfrak{U}_\partial$, причем $k > K = \max\{k_1; k_2\}$ и при $t \in [0, 1]$:

$$k_1 > \frac{1}{|a_q|} \sum_{l=0}^n |a_l| + 1, \quad k_2 > \frac{1}{|a_q| (n-q)^{n-q}} \sum_{l=0}^q |a_l| (n-q+1)^{n-l} + 1, \quad (2.4)$$

где a_l , $l = \overline{0, q}$ – коэффициенты характеристического многочлена $\det(\mu L - M)$, $q \leq n$ – его степень.

На рис. 1 представлены основные этапы алгоритма программы, осуществляющей численное решение задачи оптимального управления. На первом шаге алгоритма вводятся следующие данные: n – число параметров состояний системы; m – количество узлов для квадратурной формулы Гаусса; матрицы L , M и N ; l – степень полиномов в (2.2); Y_0 – матрица значений наблюдений, полученных в ходе натурального эксперимента, размерности $[m \times 2]$; d – радиус шара в пространстве \mathbb{R}^{l+1} , взятый в качестве \mathfrak{U}_∂^l .

Далее рассчитываются значения: s_j , c_j при $j = \overline{0, m}$; p – порядок полюса в точке ∞ L -резольвенты матрицы M ; k – значение, начиная с которого находится приближенное решение (y_k, u_k^l) задачи (1.1)–(1.4). Затем вычисляются U_k^t и Q_k .

Далее при условии, что все коэффициенты полиномов в (2.2) равны нулю, т.е. $u = \text{col}(0, \dots, 0)$, находятся значения вектор-функций состояния измерительного устройства x в каждой из $m + 1$ точек, затем

вычисляются соответствующие им значения y и, наконец, значение J при найденном y и начальном u .

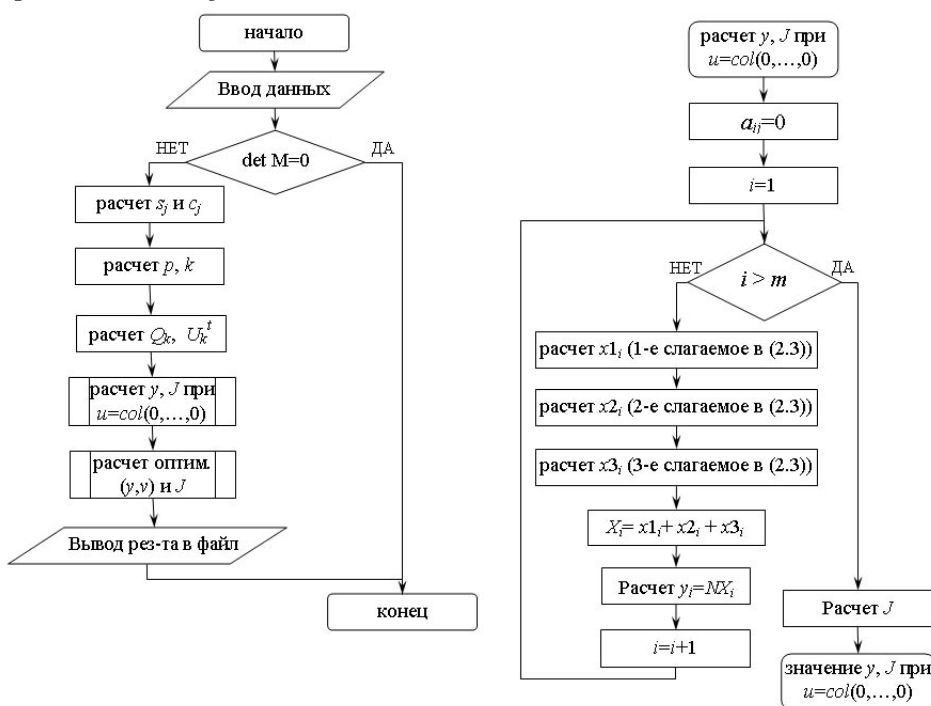


Рис. 1. Блок-схема основного алгоритма и процедуры расчета значений y и J при $u = \text{col}(0, \dots, 0)$

Процедура оптимизации подробно представлена на рис. 2, отметим лишь используемые в блок-схеме обозначения:

- a – матрица коэффициентов многочленов из (2.2), используемая в начале циклов;
- A – матрица, аналогичная a , создаваемая для промежуточных расчетов внутри циклов;
- A'_{ij} – матрица, аналогичная a , для элементов которой в цикле достигается минимум функционала при изменении коэффициента с индексами (i, j) ;
- A'_{ik} – матрица, аналогичная a , для элементов которой в строке i достигается наименьшее значение функционала, при этом фиксируется номер столбца k в этой строке;
- $J(A)$, $J(a)$ – значения функционала при коэффициентах полиномов из (2.2), образующих соответственно матрицы A и a ;
- h_{max} , h_{min} , Δ – максимальный, минимальный и промежуточные шаги оптимизации;
- см. зн. – логическое выражение «смена знака».

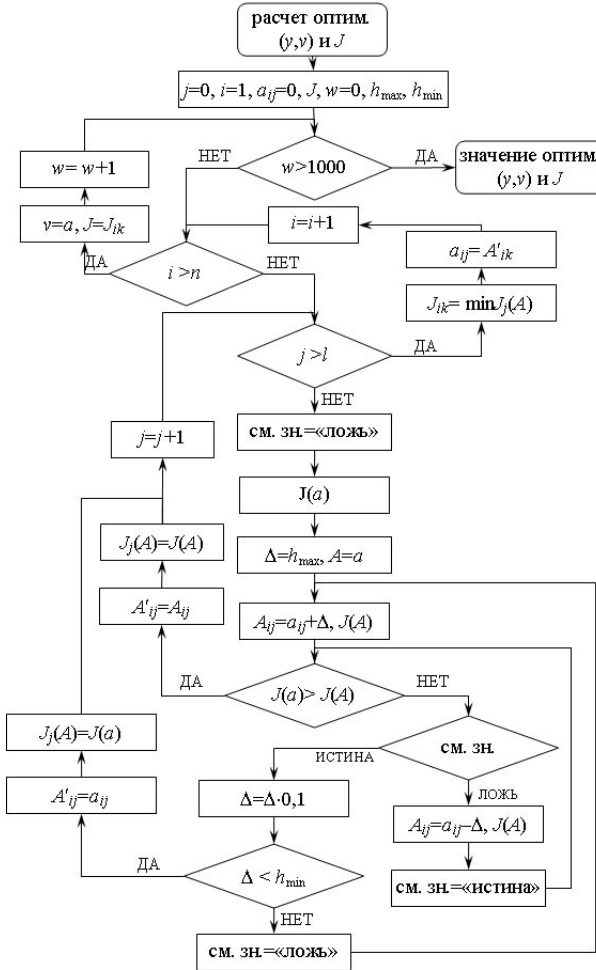


Рис. 2. Блок-схема процедуры оптимизации

В результате реализации процедуры оптимизации определяется значение измеряемого сигнала v и значение функционала J . На завершающем этапе алгоритма вычисляется значение x по формуле (2.3), а затем $y = Nx$.

3. Пример решения задачи оптимального измерения

В качестве примера рассмотрим модель датчика, передаточная функция которого имеет вид [1]

$$W_d(p) = \frac{8000000000}{(p^2 + 140p + 10000)(p + 200)^3}.$$

Тогда, модель измерительного устройства будет представлена системой

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 \cdot 10^6 & -3,8 \cdot 10^4 & -3,4 \cdot 10^2 \end{pmatrix} x + \text{col}(0 \ 0 \ 2 \cdot 10^6) u, \quad (3.1)$$

$$y = (1 \ 0 \ 0) x, \quad (3.2)$$

причем в начальный момент времени вектор-функция состояния измерительного устройства равна нулю.

Представим систему (3.1)-(3.2) в виде системы уравнений (1.1)-(1.2), построив матрицы L , M , N и D следующим образом

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 \cdot 10^6 & -3,8 \cdot 10^4 & -3,4 \cdot 10^2 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 10^6 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Реализовав первый шаг алгоритма при $l = 20$, получили $p = 0$, $k = 88796$ и, так как $\det M \neq 0$, делаем вывод, что все условия теорем 1 и 2 выполнены. Значит, существуют как точное решение (y, u) , так и последовательность приближенных решений (y_k, u_k^l) задачи (1.1)–(1.4) с матрицами (3.3)–(3.4) при $k > 88796$. Причем u_k^l минимизирует функционал J^l на некотором выпуклом компакте \mathcal{U}_∂^l .

Построим множество \mathcal{U}_∂^l . Вектор измерений u полностью определяется своей третьей компонентой, следовательно, для его нахождения можно ограничиться пространством \mathbb{R}^{l+1} . Пусть далее имеется информация, что значения измеряемого сигнала не превосходят 3, поэтому в качестве \mathcal{U}_∂^l можно взять замкнутый шар в пространстве \mathbb{R}^{l+1} радиуса 3 с центром в начале координат. Вычисления проводились с помощью программы, написанной на языке C++ и зарегистрированной в реестре программ для ЭВМ [4]. График функции восстановленного сигнала и значения выходного сигнала, полученного в результате натурального эксперимента, представлены на рис. 3.

Различия представленных графиков отражают инерционность измерительного устройства, проявляющуюся в сглаживании «пикообразного» сигнала и запаздывании выходного сигнала датчика.

Список литературы

1. Бизяев М. Н. Динамические модели и алгоритмы восстановления динамически искаженных сигналов измерительных систем в скользящем режиме : дис. ... канд. техн. наук / М. Н. Бизяев. – Челябинск, 2004.

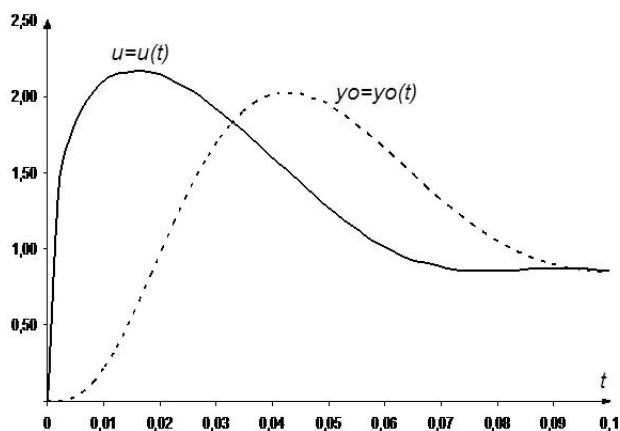


Рис. 3. Восстановленный сигнал $u = u(t)$ и значения наблюдения $y_0 = y_0(t)$

2. Келлер А. В. Об устойчивости решений систем леонтьевского типа / А. В. Келлер, Е. И. Назарова // ВЗМШ С. Г. Крейна-2010 : тез. докл. – 2010. – С. 78–79.
3. Келлер А. В. Свойство регуляризуемости и численное решение задачи динамического измерения / А. В. Келлер, Е. И. Назарова // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2010. – № 16(192). – С. 32–38.
4. Келлер А. В. Optimal measuring problem (optimeas problem): свидетельство 2010617899 / А. В. Келлер, Е. И. Назарова (RU); правообладатель ГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет». – 210615082; заявл. 16.08.2010; зарегистр. 01.12.2010, Реестр программ для ЭВМ.
5. Солдаткина Е. В. Алгоритмы адаптации параметров измерительной системы к минимуму оценки динамической Погрешности : дис. ... канд. техн. наук / Е. В. Солдаткина. – Челябинск, 2000.
6. Федоров В. Е. Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. –Т.9, № 2. – С. 92–102.
7. Шестаков А. Л. Динамическая точность измерительного преобразователя с корректирующим устройством в виде модели датчика / А. Л. Шестаков // Метрология. – 1987. – № 2. – С. 26–34.
8. Шестаков А. Л. Динамические измерения как задача оптимального управления / А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк, Е. В. Захарова // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, № 4. – С. 732–733.
9. Шестаков А. Л. Динамический измерительный преобразователь в скользящем режиме / А. Л. Шестаков, М. Н. Бизяев // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Компьютер. технологии, управление, радиоэлектроника. – Челябинск, 2003. – № 4(20), вып. 2. – С. 35–42.
10. Шестаков А. Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк // Вестник Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2010. – № 16(192). – С. 116–120.
11. Шестаков А. Л. Управление нулями и полюсами передаточной функции измерительного преобразователя с измеряемым вектором параметров состояния

- датчика / А. Л. Шестаков, Д. Ю. Иосифов // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Компьютер. технологии, управление, радиоэлектроника. – Челябинск, 2003. – № 4(20), вып. 2. – С. 42–49.
12. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semi-groups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht-Boston-Koln-Tokyo : VSP, 2003.

A. V. Keller, E. I. Nazarova

Optimal measuring problem: the computation solution, the program algorithm

Abstract. Has considered the algorithm of computational solution of dynamic measure problem as the hard optimal control problem, has described program flow diagram, that realize the algorithm, and the flow diagrams of main procedures, has given the example of problem computational solving for the concrete sensor model.

Keywords: computational solution; optimal measuring; optimal control problem; program algorithm.

Келлер Алевтина Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, ул. Сони Кривой, 79а тел.: (351)2679249 (alevtinak@inbox.ru)

Назарова Елена Игоревна, старший преподаватель, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, ул. Сони Кривой, 79а тел.: (351)2679249 (elen_ochka@mail.ru)

Keller Alevtina, South Ural State University, 79A, Soni Krivoy St., Chelyabinsk, 454080 associate professor, Phone: (351)2679249 (alevtinak@inbox.ru)

Nazarova Elena, South Ural State University, 79A, Soni Krivoy St., Chelyabinsk, 454080 assistant professor, Phone: (351)2679249 (elen_ochka@mail.ru)