Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 2. С. 134—146

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.658.4

Поиск обобщенных решений несобственных задач линейного и выпуклого программирования с помощью барьерных функций *

Л. Д. Попов
Институт математики и механики УрО РАН

Аннотация. Исследуются возможности комбинированного применения внутренних и внешних штрафных функций для отыскания обобщенных (аппроксимационных) решений несобственных задач линейного и выпуклого программирования 1-го рода. Приводятся схемы алгоритмов, теоремы сходимости.

Ключевые слова: несобственные задачи математического программирования, процедуры оптимальной коррекции, метод штрафных функций, центральный путь.

Введение

Несобственными называются задачи линейного и выпуклого программирования, для которых не выполняются основные соотношения двойственности [2], а именно, условия обоюдной разрешимости прямой и двойственной задач и совпадения их оптимальных значений. Причины несобственности кроются, главным образом, в противоречивости систем исходных и двойственных ограничений [3, 4, 14], что может быть вызвано как ошибками самой математической модели и ее информационного обеспечения, так и реальными противоречиями моделируемого объекта, которые несобственная оптимизационная модель просто адекватно отражает [4].

Разумеется, противоречивая модель не имеет решения в привычном значении этого термина. Необходимо искать ее обобщенное (компромиссное, аппроксимационное) решение. Естественным способом получения такого решения является корректировка исходных данных несобственной задачи до того состояния, при котором задача становится

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00273) и президиума УрО РАН (проекты 09-П-1-1003, 09-П-1-1001 и 09-С-1-1010).

собственной и, следовательно, имеющей решение. При этом последовательно реализуются этап корректировки исходной постановки в соответствии с некоторым выбранным критерием качества коррекции и этап нахождения обычного решения скорректированной таким образом задачи. В наиболее эффективных и привлекательных методах оптимальной коррекции эти два этапа оказываются совмещенными.

К настоящему времени накоплен значительный математический инструментарий построения обобщенных решений несобственных задач математического программирования ([3, 4, 14, 5, 8, 6, 9, 10] и др.). Для численного построения таких решений широко используются внешние штрафные функции, нестандартные схемы двойственности, лексикографические модели, фейеровские отображения и пр. В последнее время возник интерес к применению для означенных целей и внутренних штрафных функций [12]. В частности, ниже будет предложено комбинированное применение методов внешних и внутренних штрафных функций для поиска одного класса обобщенных решений, связанных с минимальной коррекцией правых частей ограничений исходной задачи. Повторимся, что особенностью предлагаемых алгоритмов является эффективное совмещение процесса корректировки исходной постановки с непосредственным поиском решения скорректированной задачи.

1. Постановка задачи и исходные предположения

Пусть имеется задача выпуклого программирования (ВП)

$$f(x) \to \min_{x \in X}, \quad X = M \cap N, \tag{1.1}$$

где

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad h_i(x) \le 0 \ (i = 1, \dots, r)\},$$

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad g_i(x) \le 0 \ (i = 1, \dots, s)\}.$$

Здесь функции $f(x)$, $h_1(x)$, $\dots$, $h_r(x)$ и $g_1(x)$, $\dots$, $g_s(x)$ всюду конечны, выпуклы и дважды непрерывно дифференцируемы (последнее условие является необязательным и введено для для простоты построения решающих правил и алгоритмов).

Рассмотрим случай $M \cap N = \varnothing$, когда исходная задача 1.1 — несобственная (противоречивая) и, как следствие, не имеет решения в обычном смысле. При этом будем предполагать, что в 1.1 множество M моделирует директивные ограничения, а множество N — факультативные. Первые, по определению, не подлежат пересмотру, в то время как вторые, напротив, можно (и нужно) корректировать.

Применим один из наиболее простых (но важных для практики) подходов к коррекции задачи 1.1. А именно, погрузим исходную постановку в параметрическое семейство задач вида

$$f(x) \to \min_{x \in X(u)}, \qquad X(u) = M \cap N(u), \tag{1.2}$$

где

$$N(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad g_i(x) \le u_i \ (i = 1, \ldots, s)\},$$

и сформулируем задачу отыскания оптимального вектора коррекции (возможно, не единственного)

$$\bar{u} \in \operatorname{Arg} \min_{u \in \mathrm{cl}\Omega,\ u \ge 0} H(u); \tag{1.3}$$

здесь $u = [u_1, \ldots, u_s]$ — вектор параметров коррекции, Ω — совокупность тех значений u, что обеспечивают задаче 1.2 свойство быть разрешимой[1], $H : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}_+$ — числовой критерий качества коррекции. Содержательно формула 1.3 формализует принцип минимальности вносимых в исходную несобственную задачу корректирующих изменений (например, можно положить $H(u) = ||u||^\sigma$, $\sigma \ge 1$, где норма $|| \cdot ||$ не обязательно евклидова).

Замечание 1. Множество разрешимости Ω тесно связано со свойствами функции оптимального значения $v(u)$ (или функции чувствительности) задачи 1.2. Для задачи выпуклого программирования функция $v(u)$ всегда является выпуклой, а в случае ее разрешимости или несобственности 1-го рода — также и собственной в терминологии [11], т. е. $v(u) > -\infty$ всюду. При этом $\Omega = \mathrm{dom} v$, где $\mathrm{dom} v$ — эффективная область (в рассматриваемом случае область конечности) функции $v(u)$. Соответственно множество Ω будет не пустым и выпуклым (но не обязательно замкнутым). Поэтому в общем случае возможно $\bar{u} \notin \Omega$. Однако, если известно $0 \le u_0 \in \mathrm{int}\Omega \ne \varnothing$, то $u_\gamma = \gamma u_0 + (1 - \gamma)\bar{u} \in \mathrm{int}\Omega$ при всех $0 < \gamma \le 1$ и $u_\gamma \to \bar{u}$ при $\gamma \to +0$.

Поставленную задачу 1.3 (или задачу оптимальной коррекции) будем рассматривать при следующем наиболее слабом из обычно используемых для этих целей наборе предположений:

$$\mathrm{int} M \ne \varnothing, \tag{1.4}$$

$$\text{функция } H(u) \text{ — выпуклая, коэрцитивная и монотонная на } \mathbb{R}^s_+, \tag{1.5}$$

$$(H(u) \ge 0 \ \ \forall u) \quad \& \quad (H(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0), \tag{1.6}$$

$$\text{выпуклая функция } v(u) \text{ — собственная (т. е. } v(u) > -\infty), \tag{1.7}$$

$$\bar{u} \in \mathrm{dom}\, \mathrm{cl} v; \tag{1.8}$$

здесь коэрцитивность выпуклой функции означает ее сверхлинейный рост при устремлении аргумента к бесконечности, $\mathrm{cl} v(u)$ — замыкание

[1] Множество Ω называют еще множеством разрешимости задачи 1.2.

функции оптимального значения задачи 1.2, $\mathbb{R}^s_+ = \{u \geq 0 | u \in \mathbb{R}^s\}$. Если вектор $\bar{u}$ определяется соотношением 1.3 не единственным образом, мы будем искать тот из них, что отвечает минимальному значению $\mathrm{cl}v(u)$.

Замечание 2. Функция $\mathrm{cl}v(u)$ полунепрерывна снизу и выпукла [1], она совпадает с функцией оптимального значения двойственной к 1.2 задачи

$$\mathrm{cl}v(u) = \sup_{y \geq 0} \left[\inf_{x \in M} \mathcal{L}(x, y) - (u, y) \right], \tag{1.9}$$

где $\mathcal{L}(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} y_i g_i(x)$ — функция Лагранжа задачи 1.1, $(\,\cdot, \cdot\,)$ — скалярное произведение векторов. При этом сделанные предположения гарантируют совпадение $\mathrm{cl}v(u) = v(u)$ для $u \in \mathrm{int}\Omega$.

2. Штрафные конструкции, лежащие в основе метода

В основу предлагаемого ниже метода оптимальной коррекции задачи 1.1, в котором процесс поиска оптимального вектора коррекции 1.3 был бы совмещен с процессом отыскания решения оптимально скорректированной задачи, положена идея комбинированного применения внешних и внутренних (барьерных) штрафных функций.

Внешняя функция штрафа $\bar{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ будет иметь вид

$$\bar{H}(x) = H(g(x)^+);$$

здесь для краткости $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_s(x))$, $a^+ = \max\{0, a\}$ для числа a и $b^+ = (b_1^+, \ldots, b_s^+)$ для вектора $b = (b_1, \ldots, b_s)$. Выписанная функция всюду конечна и выпукла (непрерывна); она отвечает за выполнение факультативных ограничений задачи 1.2 и «штрафует» их нарушение так, что

$$\bar{H}(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \bar{H}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in N. \tag{2.1}$$

Внутренняя (барьерная) функция штрафа $B : \mathrm{int}M \to \mathbb{R}$ будет отвечать за выполнение директивных ограничений. Для ее описания ограничимся наложением стандартных требований вида

$$B(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{int}M, \tag{2.2}$$

$$(x_k \in \mathrm{int}M,\ x_k \to x \in \partial M) \Longleftrightarrow \left(\lim_{k \to \infty} B(x_k) = +\infty \right); \tag{2.3}$$

мы также будем требовать выпуклости функции $B(x)$. Конструктивные примеры можно найти в [13] и др.

Определим далее вспомогательную функцию Φ_ϵ : $\mathrm{int}M \to \mathbb{R}$, комбинирующую обе приведенные выше конструкции. А именно, пусть

$$\Phi_\epsilon(x) = \bar{H}(x) + \epsilon_1 f_0(x) + \epsilon_2 B(x),$$

где $\epsilon_1,\ \epsilon_2$ — малые положительные параметры, $\epsilon_2/\epsilon_1 \to 0$.

Предлагаемый метод оптимальной коррекции основан на связи решений задач безусловной минимизации вида

$$\Phi_\epsilon(x) \to \inf_{x\in\ \mathrm{int}M} \tag{2.4}$$

с исходными постановками 1.1, 1.2 при различных наборах ϵ. Фактически $\Phi_\epsilon(x)$ есть линейная свертка трех критериев отбора вектора x, ранжированных по степени важности. Применяемое различие в масштабе весовых параметров свертки отражает наше стремление в первую очередь минимизировать функцию $\bar{H}(x)$, отвечающую за отклонение x от множества N. Затем на множестве минимума внешней штрафной функции минимизируется $f_0(x)$ — целевая функция исходной задачи. Наконец, функция $B(x)$, реализующая барьер для директивных ограничений, играет двоякую роль: она определяет множество допустимых точек в задаче минимизации внешней функции штрафа и в то же время нацеливает процесс на обобщенный аналитический центр оптимального множества результирующей задачи (в случае, когда такое множество имеет непустую относительную внутренность).

Перед тем, как перейти к теоремам сходимости, проведем вспомогательное построение. Зафиксируем $u_0 \in \mathrm{int}\Omega \Big(= \mathrm{int\,dom}v \Big)$ и рассмотрим точки

$$u_\gamma = \gamma u_0 + (1-\gamma)\bar{u}, \qquad \gamma \in (0,\,1).$$

Очевидно, что точки u_γ — промежуточные точки отрезка, соединяющего u_0 с искомым $\bar{u}$. При этом $u_\gamma \in \mathrm{int}\Omega$ и $u_\gamma \to \bar{u}$ при $\gamma \to +0$. Кроме того, в силу 1.4–1.8, при $\gamma \to +0$ имеем сходимость $v(u_\gamma) \to \mathrm{cl}v(\bar{u}) > -\infty$.

Введем обозначение

$$r(\gamma,\delta) = \inf\{\, B(x) \mid f(x) \le v(u_\gamma) + \delta,\quad x \in X(u_\gamma) = M \cap N(u_\gamma)\,\}, \tag{2.5}$$

где $\delta > 0$ — числовой параметр. Величина $r(\gamma,\delta)$ является технической и характеризует скорость роста барьерной функции $B(\cdot)$ в окрестности решения аппроксимационной задачи 1.2 при $u = u_\gamma \to \bar{u}$. Соответственно, для любых $\gamma \in (0,1),\ \delta > 0$ можно определить точки $\omega(\gamma,\delta)$ такие, что

$$\omega(\gamma,\delta) \in X(u_\gamma) = \mathrm{int}M \cap N(u_\gamma), \tag{2.6}$$

$$f(\omega(\gamma,\delta)) \le v(u_\gamma) + \delta = \mathrm{cl}v(u_\gamma) + \delta, \tag{2.7}$$

$$B(\omega(\gamma,\delta)) < 1 + r(\gamma,\delta). \tag{2.8}$$

Перейдем к обоснованию метода.

3. Общие теоремы сходимости

Первым следствием исходных предположений (главным образом выпуклости и коэрцитивности функции $H(u)$) является

Утверждение 1. *При предположениях* 1.4–1.8 *и* 2.1–2.3 *при всех* $\epsilon_{1,2} > 0$ *имеем*

$$\inf_{x \in \mathrm{int} M} \Phi_\epsilon(x) > -\infty.$$

Доказательство. В самом деле, при всех $x \in \mathrm{int} M$ верно

$$\Phi_\epsilon(x) = \bar{H}(x) + \epsilon_1 f(x) + \epsilon_2 B(x) \geq H(u) + \epsilon_1 v(u) \geq \inf_z [H(z) + \epsilon_1 v(z)];$$

здесь $u = [g_1(x), \ldots, g_s(x)]^+$ и inf справа конечен, т. к. $h(z) = H(z) + \epsilon_1 v(z)$ — также коэрцитивная функция. $\square$

Зафиксируем некоторый вектор $u \in \mathbb{R}^s$ такой, что все $\bar{u} < u$. В силу утверждения 1 можно определить векторы $x(\epsilon, \nu, u) \in M \cap N(u)$ такие, что

$$\Phi_\epsilon(x(\epsilon, \nu, u)) < \inf_{x \in \mathrm{int} M \cap X(u)} \Phi_\epsilon(x) + \nu;$$

здесь $\nu > 0, \quad \epsilon_{1,2} > 0$, при этом векторы

$$u(\epsilon, \nu, u) = [g_1(x(\epsilon, \nu, u)), \ldots, g_s(x(\epsilon, \nu, u))]^+$$

ограничены в совокупности.

Утверждение 2. *При предположениях* 1.4–1.8, 2.1–2.3 *и фиксированном* $u > \bar{u}$ *имеем*

$$\bar{H}(x(\epsilon, \nu, u)) = H(u(\epsilon, \nu, u)) \to H(\bar{u})$$

при $\epsilon_{1,2} \to +0, \quad \nu \to +0.$

Доказательство. В самом деле,

$$H(\bar{u}) = \inf_{u \in \Omega} H(u) \leq H(u(\epsilon, \nu, u)) = \bar{H}(x(\epsilon, \nu, u)) =$$

$$= \Phi_\epsilon(x(\epsilon, \nu, u)) - \epsilon_1 f(x(\epsilon, \nu, u)) - \epsilon_1 B(x(\epsilon, \nu, u)) \leq$$

$$\leq \inf_{x \in \mathrm{int} M \cap X(u)} \Phi_\epsilon(x) + \nu - \epsilon_1 v(u(\epsilon, \nu, u)) \ \leq \ \Phi_\epsilon(x) + \nu - \epsilon_1 v(u(\epsilon, \nu, u))$$

для любого $x \in \mathrm{int} M \cap X(u)$.

Переходя выше к пределу по $\epsilon_{1,2} \to +0$, $\nu \to +0$, получаем

$$H(\bar{u}) \ \leq \ \lim_{\substack{\nu\to+0,\\ \epsilon_{1,2}\to+0}} \inf H(u(\epsilon,\nu,u)) \ \leq \ \lim_{\substack{\nu\to+0,\\ \epsilon_{1,2}\to+0}} \sup H(u(\epsilon,\nu,u)) \ \leq \bar{H}(x)$$

для любого $x \in \mathrm{int} M \cap X(u)$. Следовательно,

$$H(\bar{u}) \ \leq \ \lim_{\substack{\nu\to+0,\\ \epsilon_{1,2}\to+0}} \ H(u(\epsilon,\nu,u)) \ \leq \ \inf_x \bar{H}(x) \ = \ H(\bar{u}),$$

что и требовалось. □

Следствие 1. *При любом фиксированном* $u > \bar{u}$ *и условиях* 1.4–1.8, 2.1–2.3 *имеем сходимость:* $u(\epsilon,\nu,u) \to \bar{u}$ *при* $\epsilon_{1,2} \to +0, \quad \nu \to +0.$

Следствие 2. *Пусть векторы* $\bar{x}(\epsilon,\nu) \in M$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\Phi_\epsilon(\bar{x}(\epsilon,\nu)) < \inf_{x\in \mathrm{int}M} \Phi_\epsilon(x) + \nu,$$

где $\epsilon_{1,2} > 0, \quad \nu > 0,$ *и* $\bar{u}(\epsilon,\nu) = [g_1(\bar{x}(\epsilon,\nu)),\ldots,g_s(\bar{x}(\epsilon,\nu))]^+$. *Тогда при условиях* 1.4–1.8, 2.1–2.3 *имеем сходимость:* $\bar{u}(\epsilon,\nu) \to \bar{u}$ *при* $\epsilon_{1,2} \to +0$, $\nu \to +0$.

Рассмотрим теперь условия, при которых обеспечивается сходимость значений $f(\bar{x}(\epsilon,\nu))$.

Утверждение 3. *Пусть выполнены условия* 1.4–1.8, 2.1–2.3 *и последовательности* $\epsilon_1 \to +0$, $\nu \to +0$, *причем* $\nu\epsilon_1^{-1} \to 0$. *Тогда, в дополнение к следствию* 2, *существует такая числовая функция* $h(\epsilon_1) > 0$, *что при условии* $\epsilon_2 \leq \epsilon_1^2 h(\epsilon_1)$ *имеем*

$$\lim_{\substack{\nu\to+0,\\ \epsilon_{1,2}\to+0}} \ f((\bar{x}(\epsilon,\nu)) = \mathrm{cl}v(\bar{u}).$$

Доказательство. По определению

$$\Phi_\epsilon(\bar{x}(\epsilon,\nu)) < \inf_{x\in \mathrm{int}M} \Phi_\epsilon(x) + \nu \leq \Phi_\epsilon(\omega(\gamma,\delta)) + \nu,$$

каковы бы ни были $\gamma \in (0,1)$, $\delta > 0$ и $\omega(\gamma,\delta)$ из соотношений 2.6, 2.8. Соответственно имеем неравенство

$$\epsilon_1 f(\bar{x}(\epsilon,\nu)) \leq \underbrace{\bar{H}(\omega(\gamma,\delta)) + \epsilon_1 f(\omega(\gamma,\delta)) + \epsilon_2 B(\omega(\gamma,\delta))}_{=\Phi_\epsilon(\omega(\gamma,\delta))} - \bar{H}(\bar{x}(\epsilon,\nu)) -$$

$$-\epsilon_2 B(\bar{x}(\epsilon,\nu)) + \nu \leq H(u_\gamma) - H(\bar{u}) + \epsilon_1(\mathrm{cl}v(u_\gamma) + \delta) + \epsilon_2(1 + r(\gamma,\delta)) + \nu,$$

что дает нам верхнюю оценку значений целевой функции

$$f(\bar{x}(\epsilon,\nu)) \le \frac{H(u_\gamma) - H(\bar{u})}{\epsilon_1} + \mathrm{cl} v(u_\gamma) + \delta + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}(1 + r(\gamma,\delta)) + \frac{\nu}{\epsilon_1}. \quad (3.1)$$

Кроме этого, имеем очевидную нижнюю оценку

$$\mathrm{cl}\ v(\bar{u}(\epsilon,\nu)) \le f(\bar{x}(\epsilon,\nu)). \quad (3.2)$$

Построим по последовательности $\epsilon_1 \to 0$ (фиксированной в начальных условиях) последовательность $\gamma = \gamma(\epsilon_1) \to +0$, которая бы сходилась к своему пределу настолько быстро, чтобы гарантировать условие

$$\frac{H(u_\gamma) - H(\bar{u})}{\epsilon_1} \to 0.$$

Положим также $\delta = \epsilon_1$ и обозначим

$$h(\epsilon_1) = 1/(1 + r(\gamma(\epsilon_1), \epsilon_1)).$$

Это и есть искомая функция из нашего утверждения. В самом деле, подставляя $\gamma = \gamma(\epsilon_1)$ и $\delta = \epsilon_1$ в 3.1, с учетом неравенств $\epsilon_2 \le \epsilon_1^2 h(\epsilon_1)$ и 3.2 имеем

$$\mathrm{cl}\ v(\bar{u}(\epsilon,\nu)) \le f(\bar{x}(\epsilon,\nu)) \le \frac{H(u_{\gamma(\epsilon_1)}) - H(\bar{u})}{\epsilon_1} + \mathrm{cl} v(u_{\gamma(\epsilon_1)}) + 2\epsilon_1 + \frac{\nu}{\epsilon_1}.$$

Переходя здесь к пределу по $\epsilon_1 \to +0,\ \nu \to +0$ и учитывая следствие 2, получаем

$$\lim_{\substack{\nu \to +0,\\ \epsilon_{1,2} \to +0}} f((\bar{x}(\epsilon,\nu)) = \mathrm{cl} v(\bar{u}),$$

что и требовалось. □

Замечание 3. Функция $h(\epsilon_1)$ служит для согласования скорости сходимости к нулю последовательностей $\epsilon_1 \to +0$ и $\epsilon_2 \to +0$. При этом ϵ_2, вообще говоря, получается бесконечно малой большего порядка в сравнении с ϵ_1. Однако конкретный вид функции $h(\epsilon_1)$ зависит от используемых конструкций штрафных функций $H(u)$, $B(x)$ и от функций, определяющих исходную задачу.

4. Случай задачи линейного программирования

В качестве частной, но важной для приложений постановки рассмотрим задачу линейного программирования

$$\min\{\langle c, x\rangle :\ Ax = b,\ x \ge 0\}; \quad (4.1)$$

здесь числовая матрица $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и векторы c и b соответствующей размерности заданы, x — вектор неизвестных.

Будем предполагать, что ограничения задачи 4.1 противоречивы, но совместны ограничения двойственной к ней задачи

$$\max\{\langle b, w\rangle :\ A^T w \le c\}. \tag{4.2}$$

Вследствие этого задача 4.1 с откорректированными правыми частями ограничений

$$\min\{\langle c, x\rangle :\ Ax = b - u,\ x \ge 0\} \quad (=: v(u))$$

будет разрешимой всякий раз, когда система ее ограничений оказывается совместной (здесь $u = (u_1, \dots, u_m)$ — вектор параметров коррекции).

На самом деле мы сузим класс рассматриваемых задач, потребовав наличия у двойственной задачи 4.2 точки Слейтера, т. е. выполнения условия

$$\exists w_0 \in \mathbb{R}^m :\ A^T w_0 < c. \tag{4.3}$$

Определим обобщенное решение задачи 4.1. Для этого обозначим

$$M(u) = \{x :\ Ax = b - u,\ \ x \ge 0\}$$

и зафиксируем оптимальный вектор коррекции

$$\bar{u} = \arg\min\{\, ||u|| :\ M(u) \ne \varnothing\}.$$

В качестве обобщенного решения исходной задачи будем рассматривать обычное решение откорректированной задачи

$$v(\bar{u}) = \min\{\langle c, x\rangle :\ Ax = b - \bar{u},\ x \ge 0\}. \tag{4.4}$$

В силу предположения 4.3 последняя не только разрешима, но и имеет ограниченное оптимальное множество.

Для поиска вектора $\bar{u}$ и отвечающего ему решения скорректированной задачи 4.4 применим основные идеи разделов 1, 2, но на базе логарифмических барьерных функций. А именно, введем аффинное многообразие $\mathbb{E} = \{(x, u) :\ Ax + u = b\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и комбинированную штрафную функцию вида

$$\Phi^{(1)}_\epsilon(x, u) = \langle c, x\rangle - \epsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \frac{1}{2\epsilon_2}||u||^2, \qquad \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) > 0.$$

Обозначим через $(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$ точку минимума функции $H^{(1)}_\epsilon(x, u)$ относительно многообразия $\mathbb{E}$.[2] Следуя [15], стандартные условия оптимальности для пары $(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$ можно записать в виде системы нелинейных

[2] В иной интерпретации та же самая точка $\bar{x}_\epsilon$ есть единственная точка минимума функции

$$\Phi^{(2)}_\epsilon(x) = \langle c, x\rangle - \epsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \frac{1}{2\epsilon_2}||Ax - b||^2$$

относительно $\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x > 0\}$, причем $\bar{u}_\epsilon = b - A\bar{x}_\epsilon$.

уравнений

$$\mathcal{W}(x,u,q;\epsilon) = \begin{pmatrix} Ax+u-b \\ A^T u + q - \epsilon_2 c \\ q * x - \epsilon_1\epsilon_2 e \end{pmatrix} = 0; \tag{4.5}$$

здесь “ * ” — произведение векторов по Адамару, $e = (1,\ldots,1)$, $q = (q_1,\ldots,q_n)$ — вектор вспомогательных переменных, $\epsilon = (\epsilon_1,\epsilon_2) > 0$ — параметр. Оба вектора x и q положительны.

Опишем свойства системы 4.5. Из общей теории логарифмических барьеров [13, 7, 15] в применении к ней вытекает

Утверждение 4. *Пусть оптимальное множество задачи* 4.4 *ограничено. Тогда система* 4.5 *имеет единственное решение, каковы бы ни были* $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$.

Утверждение 5. *Пусть система* 4.5 *разрешима и выполнено предположение* 4.3. *Тогда множество компонент* $\bar{u}_\epsilon$ *ее решений ограничено в совокупности при всех достаточно малых* $0 < \epsilon_{1,2} < \bar{\epsilon}$.

Доказательство. Подставляя $u = b - Ax$ во второе уравнение системы 4.5, получаем

$$A^T(b-Ax) + q = \epsilon_2 c.$$

Умножим обе части этого равенства на x и перегруппируем слагаемые:

$$||Ax||^2 = n\epsilon_1\epsilon_2 + \langle b, Ax\rangle - \epsilon_2\langle c, x\rangle.$$

Поскольку $x > 0$, то в силу 4.3 имеем

$$||Ax||^2 \le n\epsilon_1\epsilon_2 + \langle b, Ax\rangle - \epsilon_2\langle A^T w_0, x\rangle \le n\epsilon_1\epsilon_2 + (||b|| + \epsilon_2||w_0||)||Ax|| \le$$

$$\le K_1 + K_2||Ax||, \qquad K_{1,2} > 0.$$

Отсюда

$$||Ax|| \le \frac{K_2}{2} + \sqrt{\frac{K_2^2}{4} + K_1} = K_0.$$

Тем самым имеем искомое $||u|| \le ||b|| + K_0$. □

Утверждение 6. *Для решений системы* 4.5 *верно неравенство*

$$\upsilon(\bar{u}_\epsilon) \le \langle c, \bar{x}_\epsilon\rangle \le \upsilon(\bar{u}_\epsilon) + n\epsilon_1.$$

Доказательство. В самом деле, в силу первого уравнения системы 4.5 вектор $\bar{x}_\epsilon$ является допустимым для откорректированной задачи

$$\min\{\langle c, x\rangle :\ Ax = b - \bar{u}_\epsilon,\ x \ge 0\} = \upsilon(\bar{u}_\epsilon),$$

а в силу второго уравнения вектор $w = \bar{u}_\epsilon/\epsilon_2$ оказывается допустимым для задачи, двойственной к ней. Отсюда, по слабой теореме двойственности,

$$\frac{1}{\epsilon_2}\langle b - \bar{u}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon\rangle \leq \upsilon(\bar{u}_\epsilon) \leq \langle c, \bar{x}_\epsilon\rangle. \tag{4.6}$$

Но в силу тех же самых соотношений 4.5 имеем равенства

$$\langle c, \bar{x}_\epsilon\rangle = \frac{1}{\epsilon_2}\langle A^T\bar{u}_\epsilon + \bar{q}_\epsilon, \bar{x}_\epsilon\rangle = \frac{1}{\epsilon_2}\Big[\langle A\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon\rangle + \langle \bar{q}_\epsilon, \bar{x}_\epsilon\rangle\Big] = \frac{1}{\epsilon_2}\Big[\langle b - \bar{u}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon\rangle + n\epsilon_1\epsilon_2\Big],$$

т. е., с учетом 4.6,

$$\langle c, \bar{x}_\epsilon\rangle \leq \upsilon(\bar{u}_\epsilon) + n\epsilon_1.$$

Утверждение доказано. □

Следствие 3. *Пусть система* 4.5 *разрешима и выполнено предположение* 4.3. *Тогда множество компонент* $\bar{x}_\epsilon$ *также ограничено при всех достаточно малых* $0 < \epsilon_{1,2} < \bar{\epsilon}$.

Вытекает из предыдущего в силу свойств функции оптимума задачи линейного программирования и условия ограниченности оптимального множества задачи 4.4, что, как известно, влечет ограниченность и всех множеств вида

$$\mathcal{Q}(u_1, \ldots, u_m, \mu) = \{x : \langle c, x\rangle \leq \mu,\ f_i(x) \leq u_i\ (i = 1, \ldots, m),\ x \geq 0\}.$$

Перейдем к основному результату раздела.

Утверждение 7. *Пусть система* 4.5 *разрешима при всех достаточно малых* $0 < \epsilon_{1,2} < \bar{\epsilon}$ *и выполнено предположение* 4.3. *Тогда*

$$b - A\bar{x}_\epsilon = \bar{u}_\epsilon \to \bar{u}, \qquad \langle c, \bar{x}_\epsilon\rangle \to \upsilon(\bar{u}),$$

при $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \to +0$.

Доказательство. Достаточно установить первое свойство (второе следует из непрерывности функции оптимума и утверждения 6). По определению

$$||A\bar{x}_\epsilon - b||^2 + 2\epsilon_2\langle c, \bar{x}_\epsilon\rangle - 2\epsilon_1\epsilon_2\sum_{i=1}^{n}\ln\bar{x}_i^\epsilon = 2\epsilon_2\Phi_\epsilon^{(2)}(\bar{x}_\epsilon) \leq$$

$$\leq 2\epsilon_2\Phi_\epsilon^{(2)}(x) = ||Ax - b||^2 + 2\epsilon_2\langle c, x\rangle - 2\epsilon_1\epsilon_2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

при всех $x \in \mathbb{R}_{++}$ и всех $0 < \epsilon_{1,2} < \bar{\epsilon}$. Переходя здесь к пределу по $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \to +0$ и вспоминая, что компоненты $\bar{x}_\epsilon$ ограничены и $b - A\bar{x}_\epsilon = \bar{u}_\epsilon$, получаем неравенство

$$\lim_{\epsilon\to+0}||\bar{u}_\epsilon||^2 \leq ||Ax - b||^2.$$

Поскольку $x > 0$ произвольно, то также

$$\lim_{\epsilon \to +0} ||\bar{u}_\epsilon||^2 \leq \min_{x>0} ||Ax - b||^2 = ||\bar{u}||^2.$$

Остается учесть что, все $\bar{u}_\epsilon \in \Omega = \{u : \ M(u) \neq \varnothing\}$ и минимальный по норме элемент множества Ω единственен. $\square$

Таким образом задача оптимальной коррекции несобственной задачи линейного программирования по правым частям ее ограничений может быть асимптотически сведена к комбинированному применению внешних и внутренних штрафных функций или, что то же самое, к построению трех векторных траекторий $\bar{x}(\epsilon)$, $\bar{u}(\epsilon)$, $\bar{q}(\epsilon)$ аргумента $\epsilon \to +0$, неявно задаваемых нелинейными уравнениями 4.5. При этом можно опираться на общую методологию монографии [15] (методы центрального пути).

Список литературы

1. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е. Г. Гольштейн. – М. : Наука, 1971. – 352 с.
2. Еремин И. И. Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования / И. И. Еремин // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 256, № 2. – С. 272–276.
3. Еремин И.И. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования / И. И. Еремин, Вл. Д. Мазуров, Н. Н. Астафьев. – М. : Наука, 1983. – 336 с.
4. Еремин И. И. Противоречивые модели оптимального планирования / И. И. Еремин. – М. : Наука, 1988. – 160 с.
5. Исследования по несобственным задачам оптимизации : сб. ст. – Свердловск : УрО АН СССР, 1988. – 78 с.
6. Нерегулярная двойственность в математическом программировании : сб. ст. – Свердловск : УрО АН СССР, 1990. – 78 с.
7. Нестеров Ю. Е. Эффективные методы в нелинейном программировании / Ю. Е. Нестеров. – М. : Радио и связь, 1989. – 304 с.
8. Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования : сб. ст. – Свердловск : УНЦ АН СССР, 1985. – 136 с.
9. Попов Л. Д. Применение модифицированного prox-метода для оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования / Л. Д. Попов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – Екатеринбург, 1995. – Т. 3, № 2. – С. 261–266.
10. Попов Л.Д. Симметрические системы и фейеровские процессы для несобственных задач линейного программирования / Л. Д. Попов // Методы оптимизации и их приложения : тр. XIII междунар. Байкальской шк.-семинара / ИСЭМ СО РАН. – Иркутск, 2005. – Т. 1. – С. 141–146.
11. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ / Р. Т. Рокафеллар. – М. : Мир, 1973. – 472 с.

12. Скарин В. Д. О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования / В. Д. Скарин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – Екатеринбург : ИММ УрО РАН, 2008. – Т. 14, № 2. – С. 115–128.
13. Фиакко А. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации / А. Фиакко, Г. Мак-Кормик. – М. : Мир, – 1972. – 240 с.
14. Eremin I.I. Theory of linear optimization / I. I. Eremin. Ser. Inverse and Ill-Posed Problems. – Utrecht : VSP, 2002. – 336 p.
15. Roos C. Theory and algorithms for linear optimization / C. Roos, T. Terlaky, J.-Ph. Vial. – Chichester : John Wiley & Sons Ltd, 1997. – 484 p.

L. D. Popov

Search of generalized solutions to improper linear and convex programming problems using barrier functions

Abstract. We propose to seek generalized solutions to improper linear and convex mathematical programs of 1-th kind by means a special combination of both inner and external penalty functions. The algorithm schemas and convergence theorems are presented.

Keywords: improper mathematical programming problems, optimal correction methods, penalty functions, central path.

Попов Леонид Денисович, доктор физико-математических наук, в.н.с., Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16 тел.: (343)753423 (popld@imm.uran.ru)

Popov Leonid, Institute of mathematics and mechanics of UB RAS, 16, S.Kovalevskaja St., Yekaterinburg, 620219 professor, Phone: (343)753423 (popld@imm.uran.ru)