Серия «Математика»
2014. Т. 9. С. 103—117

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Классификация полугрупп операторов решения задачи Коши *

В. С. Парфененкова
Уральский федеральный университет

Аннотация. Работа посвящена изучению полугрупп операторов решения и их генераторов для абстрактной задачи Коши в банаховом пространстве. Рассмотрены такие виды семейств и порождаемых ими генераторов, как «классические», которые определены на всем банаховом пространстве и для которых справедливо полугрупповое соотношение, и регуляризованные, которые могут быть определены не на всем банаховом пространстве, сами не обладают полугрупповым соотношением, но некоторое преобразование от которых обладает. Среди классических полугрупп приведены полугруппы класса C_0, полугруппы, суммируемые по Чезаро, полугруппы, суммируемые по Абелю, полугруппы класса C_k, полугруппы класса $\mathfrak{C}_k$, полугруппы роста α. Среди регуляризованных полугрупп рассмотрены n-раз интегрированные полугруппы, R-полугруппы и конволюционные полугруппы. Для каждого вида регуляризованных полугрупп приводится описание метода регуляризации, то есть метода, который преобразует исходное семейство и позволяет перейти к исправленному полугрупповому семейству, определенному на всем банаховом пространстве. Также для каждой регуляризованной полугруппы формулируется свое определение генератора и отдельно рассматриваются экспоненциально ограниченный и локальный аналоги.

Построена диаграмма вложений рассматриваемых полугрупп операторов решений. Импликации с участием регуляризованных полугрупп получены по вложению генераторов, импликации между парами классических полугрупп — по вложению самих полугрупповых семейств и, как следствие, их генераторов. Особое внимание уделено примерам, благодаря которым удается доказать строгость некоторых вложений. Для большей наглядности главной диаграммы, в отдельную схему вынесена связь между различными видами полугрупп, суммируемых по Абелю (полугрупп класса Ab, $(0, Ab)$, $(1, Ab)$), а также их связь с полугруппами класса C_k.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, полугруппа операторов решений, генератор полугруппы.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 13-01-00090 и гранта Министерства образования и науки РФ № 1.1016.2011

1. Введение

Множество прикладных задач приводят к оперированию абстрактными задачами Коши в банаховом пространстве, в результате наблюдается большой интерес к исследованию полугрупп операторов решений задачи Коши. Рассмотрим следующую постановку

$$u'(t) = Au(t),\, t \in [0, \infty), \quad u(0) = y. \tag{1.1}$$

Свойства решения, теоремы существования единственности, формула представления решения хорошо известны в случае равномерно корректной задачи Коши, или, иначе говоря, в случае, когда оператор A порождает полугруппу класса C_0 (см., напр., [1; 2]). Однако в реальных примерах далеко не всегда оператор A обладает такими свойствами. Это значит, что решение может не существовать, быть не единственным или определяться не на всем банаховом пространстве.

На протяжении более полувека математики вводили определения различных полугрупп операторов решений, каждая из которых имела какую-либо свою особенность. В некоторых рассматриваемых случаях введенное семейство обладало полугрупповым соотношением, но задача Коши с генератором A этого семейства, не являлась равномерно корректной. В других случаях само введенное семейство не обладало полугрупповым соотношением, однако некоторое преобразование от семейства им обладало. В первом случае далее такие семейства будем называть «классическими», во втором — регуляризованными. К настоящему моменту введено множество семейств операторов решений как классических, таких как суммируемых по Абелю или Чезаро, полугрупп роста, полугрупп класса C_k или $\mathfrak{C}_k$, так и регуляризованных, таких как интегрированных, конволюционных, R-регуляризованных полугрупп. Естественным образом назрела проблема установления взаимосвязей между введенными семействами.

Целью настоящей работы является установление классификации между всеми рассматриваемыми в работе семействами. Также автору очень интересны примеры, которые доказывают строгость доказанных вложений. Представленная в работе диаграмма является продолжением работы [3], которая, по данным автора, является «флагманской» в отношении построения диаграммы между большим количеством различных семейств операторов решений, в то время как большинство известных работ устанавливают взаимосвязи между какими-либо парами различных семейств. В текущей работе приведена итоговая диаграмма связей, полученная автором, доказательства, либо ссылки на доказательства этих связей, а также примеры, доказывающие строгость вложений. Для большей наглядности итоговой диаграммы в отдельное обсуждение вынесен кусок, связанный с различными вариантами полугрупп, суммируемых по Абелю.

Известия Иркутского государственного университета.
2014. Т. 9. Серия «Математика». С. 103–117

2. Определения и вспомогательные результаты

Пусть X — банахово пространство.

Определение 1. *Семейство линейных ограниченных операторов $\{U(t), t \geqslant 0\}$ называется полугруппой, если выполнено полугрупповое соотношение $U(t+s) = U(t)U(s)$, $t, s \geqslant 0$, $U(0) = I$.*

Определение 2. *Семейство линейных ограниченных операторов $\{U(t), t \geqslant 0\}$ называется сильно непрерывной (при $t > 0$) полугруппой, если оно является полугруппой и при $t > 0$ выполнено свойство сильной непрерывности $\lim\limits_{t \to t_0 > 0} U(t)x = U(t_0)x$, $x \in X$.*

Определение 3. *Инфинитезимальным генератором полугруппы $\{U(t), t \geqslant 0\}$ называется оператор A_0, определяемый следующим образом: $A_0 x = \lim\limits_{t \to 0} \frac{(U(t)x - x)}{t}$, $\quad Dom(A_0) = \left\{x \in X : \exists \lim\limits_{t \to 0} \frac{(U(t)x - x)}{t}\right\}$. Оператор A_0 замыкаем. Оператор A, являющийся его замыканием, называется генератором полугруппы $\{U(t), t \geqslant 0\}$.*

Определение 4. *Сильно непрерывная полугруппа $\{U(t), t \geqslant 0\}$ называется полугруппой класса C_0, если свойство сильной непрерывности выполнено при $t_0 \geqslant 0$, иначе говоря, $\lim\limits_{t \to 0} U(t)x = x$, $x \in X$.*

Определение 5. *Областью значений полугруппы называется множество $X_0 = \cup_{t>0} U(t)[X]$. Типом полугруппы называется число $\omega_0 = \lim\limits_{t \to \infty} t^{-1} ln \|U(t)\|$.[1] Множеством непрерывности полугруппы называется подмножество Σ банахового пространства X, определенное следующим образом $\Sigma = \{x : \lim\limits_{t \to 0} U(t)x = x\}$.*

Известно (см., напр., [1]), что для равномерной корректности задачи Коши (1.1) необходимо и достаточно, чтобы оператор A являлся генератором полугруппы класса C_0. В этом случае решение задачи Коши представимо в виде $u(t) = U(t)y$, $t \geqslant 0$, $y \in X$. Однако нередко возникает ситуация, когда полугруппа операторов решений $\{U(t), t \geqslant 0\}$ определена на X при всех $t > 0$, а при $t = 0$ определена не на всем X. Именно по типу особенности в нуле и строится классификация «классических» полугрупп. Приведем необходимые определения.

Определение 6. *Полугруппа $\{U(t), t \geqslant 0\}$ называется невырожденной, если из условия $U(t)x = 0, \forall t > 0$ следует, что $x \equiv 0$.*

Полугруппа класса C_0 является невырожденной.

[1] В монографии [2] показано, что указанный предел существует и $-\infty \leqslant \omega_0 < \infty$.

Определение 7. *Оператор* $Ces(\eta)x = \frac{1}{\eta}\int\limits_0^\eta U(t)xdt$ *называется оператором Чезаро. Сильно непрерывная невырожденная полугруппа* $\{U(t), t \geqslant 0\}$ *называется суммируемой по Чезаро или полугруппой класса* Ces*, если* $\lim\limits_{\eta\to 0} Ces(\eta)x = x$*. Если полугруппа суммируема по Чезаро и выполнено* $\int\limits_0^1 \|U(s)x\|ds < \infty$*,* $x \in X$*, то полугруппа называется полугруппой класса* $(0, Ces)$*. Если полугруппа суммируема по Чезаро и выполнено* $\int\limits_0^1 \|U(s)\|ds < \infty$*, то полугруппа называется полугруппой класса* $(1, Ces)$*.*

Определение 8. *Оператор* $Ab(\lambda)x = \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt$*, называется оператором Абеля. Сильно непрерывная невырожденная полугруппа* $\{U(t), t \geqslant 0\}$ *называется суммируемой по Абелю или полугруппой класса* Ab*, если* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt = x$*. Если полугруппа суммируема по Абелю и выполнено* $\int\limits_0^1 \|U(s)x\|ds < \infty$*,* $x \in X$*, то полугруппа называется полугруппой класса* $(0, Ab)$*. Если полугруппа суммируема по Абелю и выполнено* $\int\limits_0^1 \|U(s)\|ds < \infty$*, то полугруппа называется полугруппой класса* $(1, Ab)$*.*

Как показано в [2], у сильно непрерывных при $t > 0$ полугрупп $\overline{Dom(A_0)} = X$; для полугрупп класса C_0, Ces, Ab справедливо $\overline{X_0} = X$, для всех дальнейших полугрупп это не является следствием поведения полугруппы в окрестности нуля и может быть наложено дополнительно.

Определение 9. *Сильно непрерывная полугруппа* $\{U(t), t \geqslant 0\}$ *называется полугруппой класса* C_k*, если выполнены следующие условия*

1) $\overline{X_0} = X, \quad Dom(A^k) \subset \Sigma$*;*

2) $\exists\,\omega_1 > \omega_0 : \forall\lambda > \omega_1$ *определен инъективный ограниченный оператор* $R(\lambda)x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)xdt$*,* $x \in X_0$*.*

Невырожденность полугруппы класса C_k вытекает из существования обратного оператора.

Определение 10. *Сильно непрерывная полугруппа* $\{U(t), t \geqslant 0\}$ *называется полугруппой класса* $\mathfrak{C}_k$*, если выполнены следующие условия*

1) $\overline{X_0} = X, \quad Dom(A^k) \subset \Sigma$*;*

2) инфинитезимальный генератор A_0 *имеет замыкание, то есть существует полный инфинитезимальный генератор* $A = \overline{A_0}$*. Существует* $\omega > \omega_0 : \forall \lambda > \omega \ \exists (\lambda - A)^{-1}$*.*

Определение 11. *Сильно непрерывная полугруппа* $\{U(t), t \geqslant 0\}$ *называется полугруппой роста* α *(*$\alpha > 0$*), если выполнены*

1) $\overline{X_0} = X$*;*

2) $(\forall t > 0 \quad U(t)x = 0) \Longrightarrow x = 0$*;*

3) $\|t^\alpha U(t)\|$ *ограничена при* $t \to 0$.

Все введенные до этого полугруппы операторов решений определены на всем банаховом пространстве X. Однако, если полугруппа операторов решений определена не на всем X, то ее пытаются «исправить», применив некоторую регуляризацию, и перейти к рассмотрению этого «исправленного» семейства операторов, которое будет определено на всем X и будет обладать полугрупповым соотношением. Приведем определения различных регуляризованных полугрупп (а значит и методов регуляризации) и их генераторов.

Для всех рассмотренных ранее полугрупп справедлива экспоненциальная ограниченность. В случае регуляризованных полугрупп, это не вытекает из определения и его можно дополнительно наложить. В связи с этим для каждой регуляризованной полугруппы будем отдельно рассматривать случай, когда дополнительно наложено условие экспоненциальной ограниченности.

В случае, когда семейство определено лишь на некотором промежутке $[0, T)$, где $T \in (0, \infty)$ семейство будем называть локальным.

Определение 12. *Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов* $\{U(t), t \geqslant 0\}$ *называется* n*-раз интегрированной полугруппой, если выполнены следующие условия*

1) $\frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^t [(s-r)^{n-1} U(t+r) - (t+s-r)^{n-1} U(r)] dr = U(t)U(s)$*;*

2) $U(\cdot)$ *сильно непрерывно при* $t \geqslant 0$*,* $U(0) = 0$*;*

3) $(\forall t \geqslant 0 \quad U(t)x = 0) \Longrightarrow x = 0$*.*

Оператор $R(\lambda)$, определяемый формулой $R(\lambda) = \int\limits_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} U(t) dt$ обратим, и существует единственный оператор A такой, что $\forall \lambda \ Re(\lambda) > \omega_0, \ R(\lambda)^{-1} = (\lambda I - A)$. Этот оператор A называется *генератором* n*-раз интегрированной полугруппы.*

Определение 13. *Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов* $\{U(t), t \geqslant 0\}$ *называется* R*-полугруппой, если* $U(t+s)R = U(t)U(s)$, $U(0) = R$ *и* $U(\cdot)$ *сильно непрерывна по* $t \geqslant 0$.

Оператор $A_0 = \lim\limits_{t\to 0} \frac{(R^{-1}U(t)x - x)}{t}, Dom(A_0) = \left\{ x : \exists \lim\limits_{t\to 0} \frac{(R^{-1}U(t)x - x)}{t} \right\}$, плотно определен и замыкаем. Его замыкание называется *генератором* R*-полугруппы.*

Определение 14. *Пусть* $R(t)$ *интегрируема на* $t \geqslant 0$, A *— линейный замкнутый оператор. Сильно непрерывное при* $t \in [0, \infty)$ *семейство* $U(t)$ *называется регуляризованной полугруппой, если выполнены:*

1) $A \int\limits_0^t U(s)f\,ds = U(t)f - \int\limits_0^t R(s)f\,ds, \ f \in X, t \geqslant 0,$

2) $\int\limits_0^t U(s)Af\,ds = U(t)f - \int\limits_0^t R(s)f\,ds, \ f \in Dom\,A, t \geqslant 0.$

Оператор A *называется генератором регуляризованной полугруппы* $\{U(t), t \geqslant 0\}$*. Если* $R(t) = k(t)I$*, где* $k(t)$ *— вещественнозначная непрерывная функция, регуляризованная полугруппа называется* k*-конволюционной полугруппой операторов.*

3. Классификация полугрупп

Диаграмму установленных между полугруппами соотношений см. на рис. 1. Здесь стрелка вида $k \to n$ означает, что полугруппа класса k является полугруппой класса n. Стрелка вида $k \dashrightarrow n$ означает, что генератор полугруппы класса k является генератором полугруппы класса n.

4. Доказательство связей, указанных в схеме

$\underline{1 \to 2}$: Полугруппа класса C_0 является полугруппой класса $(1, Ces)$.
$\underline{1 \to 6}$: Полугруппа класса C_0 имеет нулевой рост.
$\underline{6 \to 9}$: Из того, что семейство является полугруппой роста α при $\alpha < 1$ следует, что оно является полугруппой роста α при $\alpha \geqslant 1$.
$\underline{7 \to 10}$: Из того, что семейство является полугруппой класса C_n вытекает, что оно является полугруппой класса C_m при всех $m \geqslant n$.
$\underline{2 \to 3}$, **$\underline{4 \to 5}$**: Полугруппа класса $(1, Ces)$ является полугруппой класса $(0, Ces)$, а полугруппа класса $(1, Ab)$ является полугруппой класса $(0, Ab)$, т.к. из $\int\limits_0^1 \|U(s)\| ds < \infty$ следует, что $\int\limits_0^1 \|U(s)x\| ds < \infty$, $x \in X$.

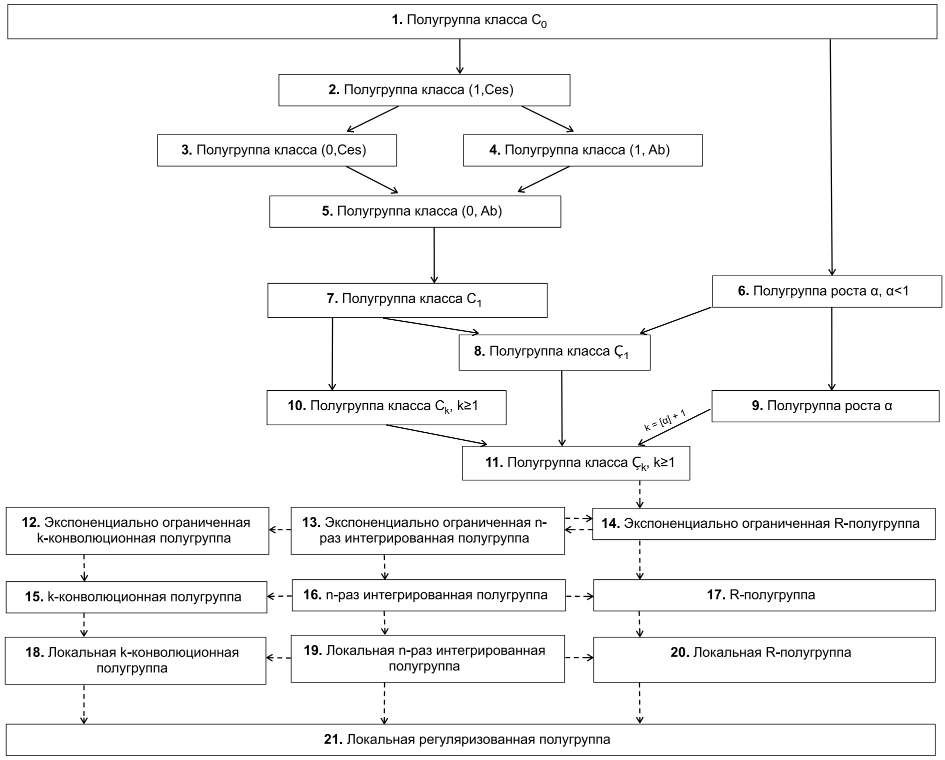

Fig. 1. Установленные связи между полугруппами

$\underline{2 \to 4}$, **$\underline{3 \to 5}$**: Суммируемость по Чезаро влечет за собой суммируемость по Абелю [2]: интегрированием по частям, имеем

$$Ab(\lambda)x = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)x dt = \lambda^2 \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} t \left[\frac{1}{t} \int\limits_0^t U(s)x ds \right] dt.$$

Таким образом, $Ab(\lambda)x - x = \lambda^2 \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} t [Ces(t)x - x] dt$. Оператор Чезаро экспоненциально ограничен: если $\omega > \max(0, \omega_0)$, где ω_0 — тип полугруппы, то $\|Ces(t)x\| \leqslant M(\omega)e^{\omega t}$. Значит

$$\|\lambda^2 \int_0^\delta e^{-\lambda t} t[Ces(t)x - x]dt\| \leqslant \|Ces(t)x - x\|, \quad 0 < t < \delta,$$

$$\|\lambda^2 \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} t[Ces(t)x - x]dt\| \leqslant \frac{2\lambda^2 M(\omega)}{(\lambda-\omega)^2}[1 + (\lambda - \omega)\delta]e^{-(\lambda-\omega)\delta}.$$

Имеем $\|Ab(\lambda)x - x\| \longrightarrow_{\lambda\to\infty} 0$. Поэтому полугруппа класса $(1, Ces)$ является полугруппой класса $(1, Ab)$, а полугруппа класса $(0, Ces)$ является полугруппой класса $(0, Ab)$.

$\underline{5 \to 7}$: Данный факт доказан в работе [4] (теорема 6.15). Доказательство основано на серии оценок для резольвенты и доказательстве выполнения условия феллеровости. Взаимосвязи полугрупп, суммируемых по Абелю и полугрупп класса C_k, уделено отдельное внимание в следующем разделе.

$\underline{7 \to 8}$, **$\underline{10 \to 11}$**, **$\underline{12 \dashrightarrow 15}$**, **$\underline{13 \dashrightarrow 16}$**, **$\underline{14 \dashrightarrow 17}$**, **$\underline{15 \dashrightarrow 18}$**, **$\underline{16 \dashrightarrow 19}$**, **$\underline{17 \dashrightarrow 20}$**: Данные связи являются непосредственным следствием определений данных полугрупп.

$\underline{6 \to 8}$, **$\underline{9 \to 11}$**: В работе [5] показано, что полугруппа роста α является полугруппой класса $\mathfrak{C}_k$, где $k = [\alpha] + 1$. В частном случае, при $\alpha < 1$, полугруппа роста α является полугруппой класса $\mathfrak{C}_1$. А именно: второе условие в определении полугруппы класса α влечет за собой замыкаемость инфинитезимального генератора, то есть существование генератора и обратимость оператора $\lambda - A$ при $\lambda > \omega_0$ ([5], лемма 3.1). В совокупности с третьим условием из определения полугруппы класса α получаем вложенность множества $Dom(A^{[\alpha]+1})$ в множество непрерывности полугруппы Σ ([5], лемма 3.3).

$\underline{11 \dashrightarrow 14}$ В работе [4] через специально введенное семейство операторов $\mathfrak{C}_1(\omega, k)$ сформулирован критерий для того, чтобы оператор A был генератором полугруппы класса $\mathfrak{C}_k$ (теорема 6.12), далее, используя результаты теоремы 4.2 и следствия 4.4, получаем искомый результат.

$\underline{13 \dashrightarrow 12}$, **$\underline{16 \dashrightarrow 15}$**, **$\underline{19 \dashrightarrow 18}$**: В качестве конволюционного оператора $k(t)$ достаточно взять оператор $t^n/n!$. Таким образом, интегрированная полугруппа является частным случаем конволюционной полугруппы.

$\underline{14 \dashrightarrow 13}$, **$\underline{13 \dashrightarrow 14}$**, **$\underline{16 \dashrightarrow 17}$**, **$\underline{19 \dashrightarrow 20}$**: Данная связь в обе стороны в случае когда A — замкнутый оператор на X вытекает из результатов работы [6]. n-раз интегрированная полугруппа V может быть построена по R-полугруппе U: $V(t)f = (\lambda_0 I - A)^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} U(t_n) f dt_n \dots dt_1$. R-полугруппа может быть построена по n-раз интегрированной полугруппе следующим образом: $U(t)f = \dfrac{d^n}{dt^n} U(t)\mathcal{R}^n(\lambda_0)f$.

$\underline{\mathbf{18} \dashrightarrow \mathbf{21}}$, $\underline{\mathbf{19} \dashrightarrow \mathbf{21}}$, $\underline{\mathbf{20} \dashrightarrow \mathbf{21}}$: Тот факт, что конволюционная полугруппа является регуляризованной вытекает непосредственно из определения. R-полугруппа является регуляризованной полугруппой с оператором $R = R(t)$.

Связь между полугруппами, суммируемыми по Абелю и полугруппами класса C_k вынесена в отдельную диаграмму для большей наглядности основной диаграммы.

В работе [4] показано, что полугруппа класса Ab является полугруппой класса C_2 (теорема 6.14), а полугруппа класса $(0, Ab)$ является полугруппой класса C_1 (теорема 6.15). Таким образом, справедлива схема, изображенная на рис. 2.

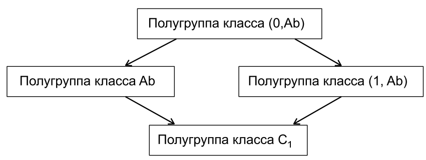

Fig. 2. Связь между полугруппами классов $(0, Ab), (1, Ab), Ab, C_1$

5. Примеры, демонстрирующие строгость доказанных вложений

Пример 1. Пример строгой вложенности полугрупп класса $(0, Ab)$ **в полугруппы роста** α**. Построена серия полугрупп сколь угодно малого роста, не суммируемая по Абелю**. Пусть X — множество последовательностей пар чисел $\{(x_n, y_n)\}$ с конечной нормой $\|\{(x_n, y_n)\}\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(|x_n|^2 + n^p|y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Определим оператор $U(t)$ следующим образом: $U(t)\{(x_n, y_n)\} = \{(\overline{x}_n, \overline{y}_n)\}$:

$$\overline{x}_n = e^{-(n+1)t}(x_n \cos nt - y_n \sin nt), \quad \overline{y}_n = e^{-(n+1)t}(y_n \cos nt + x_n \sin nt).$$

Семейство операторов $\{U(t), t > 0\}$ образует полугруппу. Эта полугруппа сильно непрерывна при $t > 0$. При $t \to +0$ сходимости к 0 не будет. Оценим норму операторов $U(t)$ при фиксированном $t > 0$. $\|U(t)\| =$

$$\sup_{(\{x_n, y_n\})} \frac{\|U(t)(\{x_n, y_n\})\|}{\|(\{x_n, y_n\})\|} = \sup_{(\{x_n, y_n\})} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(n+1)t}(x_n^2 \cos^2 nt + y_n^2 \sin^2 nt}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n^2 + n^p y_n^2)^{1/2}}$$

$$\frac{-2x_n y_n \cos nt \sin nt + n^p(y_n^2 \cos^2 nt + x_n^2 \sin^2 nt + 2x_n y_n \cos nt \sin nt))^{1/2}}{}.$$

Получим

$$\|U(t)\| \leqslant \sup_n \left(n^{\frac{p}{2}} e^{-(n+1)t}\right) \leqslant n^{\frac{p}{2}} e^{-(n+1)t}\Big|_{n=\frac{p}{2t}} = p^{\frac{p}{2}}(2e)^{-\frac{p}{2}} t^{-\frac{p}{2}} e^{-t}.$$

Значит полугруппа $\{U(t), t > 0\}$ является полугруппой роста $\frac{p}{2}$.

Оператор $R(\lambda)\{(x_n, y_n)\} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)\{(x_n, y_n)\}dt =: \{(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n)\}$ существует и ограничен при $\lambda > 0$. Здесь

$$\widetilde{x}_n = \frac{\lambda + n + 1}{(\lambda + n + 1)^2 + n^2} x_n - \frac{n}{(\lambda + n + 1)^2 + n^2} y_n = \alpha_n(\lambda) x_n - \beta_n(\lambda) y_n,$$

$$\widetilde{y}_n = \frac{\lambda + n + 1}{(\lambda + n + 1)^2 + n^2} y_n + \frac{n}{(\lambda + n + 1)^2 + n^2} x_n = \alpha_n(\lambda) y_n + \beta_n(\lambda) x_n.$$

Оценим норму оператора $R(\lambda)$.

$$\|R(\lambda)\| \geqslant \sup_n \left(c \cdot n^{\frac{p}{2}} \beta_n\right) = \sup_n \left(\frac{c \cdot n \cdot n^{\frac{p}{2}}}{(\lambda + n + 1)^2 + n^2}\right) \geqslant \frac{c \cdot \lambda^{1+\frac{p}{2}}}{5(\lambda + 1)^2},$$

где c — некоторая константа. Таким образом, $\lambda R(\lambda)$ неограничено при $\lambda \to \infty$. Значит полугруппа $\{U(t), t > 0\}$ не суммируема по Абелю.

Пример 2. Пример строгой вложенности $(0, Ces)$ **в** $(0, Ab)$. Пусть X — множество последовательностей пар чисел $\{(x_n, y_n)\}$, для которых конечна норма $\|\{(x_n, y_n)\}\| = \sup_n |x_n| + \sum\limits_{n=1}^\infty n^{\frac{1}{2}} |y_n|$. Определим оператор $U(t)$ следующим образом: $U(t)\{(x_n, y_n)\} = \{(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\}$:

$$\bar{x}_n = e^{-(n^{\frac{3}{2}} + in^2)t}(x_n \cos n^{\frac{1}{2}} t - y_n \sin n^{\frac{1}{2}} t),$$

$$\bar{y}_n = e^{-(n^{\frac{3}{2}} + in^2)t}(y_n \cos n^{\frac{1}{2}} t + x_n \sin n^{\frac{1}{2}} t).$$

Семейство $\{U(t),\ t \geqslant 0\}$ обладает полугрупповым соотношением. Справедливо $\|U(t)\{(x_n, y_n)\}\| \leqslant \sup_n |x_n| \left[1 + \sum\limits_{n=1}^\infty n^{\frac{1}{2}} e^{-n^{\frac{3}{2}} t}\right] + 2 \sum\limits_{n=1}^\infty n^{\frac{1}{2}} |y_n|$. Таким образом, полугруппа сильно непрерывна при $t > 0$, однако она не является сильно непрерывной при $t \to 0$. Полугруппа не обладает свойством суммируемости по Чезаро, так как оператор Чезаро не ограничен. С другой стороны, оператор $R(\lambda)\{(x_n, y_n)\} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)\{(x_n, y_n)\}dt =:$ $\{(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n)\}$ существует и ограничен при $\lambda > 0$. Здесь

$$\widetilde{x}_n = \frac{\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2}{(\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2)^2 + n} x_n - \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2)^2 + n} y_n = \alpha_n(\lambda) x_n - \beta_n(\lambda) y_n,$$

$$\widetilde{y}_n = \frac{\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2}{(\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2)^2 + n} y_n + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2)^2 + n} x_n = \alpha_n(\lambda) y_n + \beta_n(\lambda) x_n.$$

Справедливы оценки $\alpha_n(\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$, $\beta_n(\alpha) = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2)^2 + n}$, поэтому $\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{C}{\lambda}$ при $\lambda > 1$ для некоторой константы C и при этом $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda)\{x_n, y_n\} = \{x_n, y_n\}$, а значит $\{U(t), t > 0\}$ суммируема по Абелю.

Пример 3. Семейство операторов, зависящих от параметра γ, которое, в зависимости от значения параметра, порождает полугруппу класса C_0, интегрированную полугруппу, полугруппу роста α или R-полугруппу. Пусть $X = L_p(\mathbb{R}) \times L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$, пространство функций-векторов $f(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot))$ с нормой $\|f\| = \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$. Пусть оператор A является оператором умножения на матрицу $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} -h & 0 \\ -g & -h \end{pmatrix}$, $\mathrm{Dom}\ A = \{f \in X :\ hf_1,\ gf_1 + hf_2 \in L_p(\mathbb{R})\}$, где $h(x) = 1 + x^2,\ g(x) = x^{2\gamma},\ x \in \mathbb{R},\ \gamma \geqslant 0$. Тогда при $t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}$

$$U(t)x = (I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \ldots + \frac{t^nA^n}{n!} + \ldots)x = e^{-t(1+x^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -tx^{2\gamma} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_{L(X)} &= \max\left\{\max_{x\in\mathbb{R}} e^{-t(1+x^2)}; \max_{x\in\mathbb{R}} t|x|^{2\gamma} e^{-t(1+x^2)}\right\} = \\ &= \max\left\{e^{-t};\ \gamma^\gamma t^{1-\gamma} e^{-t-\gamma}\right\}.\end{aligned}$$

В случае $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ операторы $U(t)$ ограничены при $t \geqslant 0$. Значит семейство $\{U(t), t \geqslant 0\}$ образует полугруппу класса C_0.

В случае $\gamma > 1$ МФФХИ-условие не выполнено для $(\lambda I - A)^{-1}$. Оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ ограничен при $1 < \gamma \leqslant 2$ и неограничен при $\gamma > 2$. Следовательно резольвента A существует только при $\gamma \leqslant 2$.

При $\gamma > 1$ семейство $\{U(t), t \geqslant 0\}$ имеет особенность в точке $t = 0$. При $\gamma < 2$ эта особенность интегрируема, поэтому покажем, что при $1 < \gamma < 2$ оператор A является генератором 1-раз интегрированной полугруппы $V(t) = \int\limits_0^t U(s)\,ds = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 - e^{-ht} & 0 \\ tge^{-ht} - (1 - e^{-ht})\frac{g}{h} & 1 - e^{-ht} \end{pmatrix}$, $t \geqslant 0$. Значит семейство $V(t)$ ограничено при каждом t, $V(\cdot)$ сильно непрерывно при $t \geqslant 0$ и $\{V(t), t \geqslant 0\}$ при $1 < \gamma < 2$ удовлетворяет всем условиям определения интегрированной полугруппы.

При $\gamma > 1$ норма $\|t^\alpha U(t)\|_{L(X)}$ ограничена при $t \to 0$ для всех $\alpha \geqslant \gamma - 1$. Множество $X_0 := \bigcup_{t>0} U(t)(X)$ плотно в X, поскольку оператор $U(t)$ при $t > 0$ отображает плотное в пространстве X множество конечных вектор-функций в множество конечных вектор-функций. Семейство $\{U(t), t \geqslant 0\}$ невырождено. Следовательно $\{U(t), t \geqslant 0\}$ образует полугруппу роста $\alpha \geqslant \gamma - 1$. Тогда, в силу доказательства связи между полугруппами роста α и R-полугруппами, получаем, что A является генератором R-полугруппы с $R = (\lambda_0 I - A)^{-n}$, $n = [\alpha]+1$. Заметим, что оператор $(\lambda I - A)^{-n}$ является n-ой степенью резольвенты только для случая $\gamma \leqslant 2$. В случае $\gamma > 2$ резольвенты не существует.

Пример 4. Семейство операторов, которое в зависимости от значения параметров образует полугруппу операторов, суммируемую по Абелю, но при этом не суммируемую по Чезаро; полугруппу роста α, но при этом не суммируемую по Абелю; интегрированную полугруппу, не являющуюся сильно непрерывной в бесконечном количестве точек. Рассмотрим семейство операторов $A = A(a_n, b_n)$, пусть $U(t)\{x_n, y_n\} = e^{At}\{x_n, y_n\} = \{e^{a_n t}(x_n \cos b_n t - y_n \sin b_n t), e^{a_n t}(y_n \cos b_n t + x_n \sin b_n t)\}$ в X. Покажем, что, в зависимости от выбора значений a_n, b_n и нормы в пространстве X, семейство $\{U(t), t \geqslant 0\}$ образует перечисленные выше виды полугрупп.

Пусть X — пространство пар $\{(x_n, y_n)\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}}|y_n| < \infty$ с нормой $\|\{(x_n, y_n)\}\| = \sup_n |x_n| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}}|y_n|$.

Определим $U(t)\{(x_n, y_n)\} =$
$= \{e^{-(n^{\frac{3}{2}}+in^2)t}(x_n \cos n^{\frac{1}{2}} t - y_n \sin n^{\frac{1}{2}} t),\ e^{-(n^{\frac{3}{2}}+in^2)t}(y_n \cos n^{\frac{1}{2}} t + x_n \sin n^{\frac{1}{2}} t)\}$. Тогда $\{U(t), t > 0\}$ образует полугруппу ограниченных операторов

$$\|U(t)\{(x_n, y_n)\}\| \leqslant \sup |x|_n[1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} e^{-n^{\frac{3}{2}}t}] + 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}}|y_n|,$$

сильно непрерывных при $t > 0$, но не сильно непрерывных при $t \geqslant 0$. Множество $X_0 \equiv \bigcup_{t>0} U(t)[X]$ включает в себя все последовательности векторов, компоненты которых равны нулю для достаточно большого количества, такое множество плотно в X. Операторы $\mathcal{R}(\lambda)\{x_n, y_n\} =$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} U(t)\{(x_n, y_n)\} dt = \{\alpha_n(\lambda)x_n - \beta_n(\lambda)y_n,\ \alpha_n(\lambda)y_n + \beta_n(\lambda)x_n\}, \tag{5.1}$$

$\alpha_n(\lambda) = \dfrac{\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2}{(\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2)^2 + n}$, $\beta_n(\lambda) = \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{(\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2)^2 + n}$ существуют, ограничены при каждом $\lambda > 0$ и справедлива оценка $\alpha_n(\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$, $\beta_n(\lambda) \leqslant \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2 + n^4}$. Следовательно $\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant \frac{C}{\lambda}$ при $\lambda > 1$ и

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \mathcal{R}(\lambda)\{x_n, y_n\} = \{x_n, y_n\}.$$

Следовательно семейство $\{U(t), t \geqslant 0\}$ образует полугруппу суммируемую по Абелю.

Видно, что $\|U(t)\| = \mathcal{O}_{t\to 0}(t^{-\frac{1}{3}})$. Следовательно интеграл $\int\limits_0^{\eta} U(s)ds$ существует, в то время как $C(\eta)$ не ограничена при $\eta \to 0$. Следовательно полугруппа является суммируемой по Абелю, но при этом не является суммируемой по Чезаро.

Пусть теперь X — пространство пар $\{(x_n, y_n)\}$ с нормой $\|\{x_n, y_n\}\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(|x_n|^2 + n|y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ и пусть $a_n = -(n+1), b_n = n$. Тогда

$$U(t) = \{e^{-(n+1)}(x_n \cos nt + y_n \sin nt), e^{-(n+1)}(y_n \cos nt - x_n \sin nt)\},$$
$$\|U(t)\| \leqslant \sup_n (n^{\frac{1}{2}} e^{-(n+1)t}) = (2et)^{-\frac{1}{2}} e^{-t}.$$

Семейство $\{U(t), t \geqslant 0\}$ является полугруппой сильно непрерывной при $t > 0$. Множество X_0 плотно в X. $\mathcal{R}(\lambda)$ определяется через (5.1), где

$$\alpha_n(\lambda) = \frac{\lambda + n + 1}{(\lambda + n + 1)^2 + n^2}, \quad \beta_n(\lambda) = \frac{n}{(\lambda + n + 1)^2 + n^2}.$$

ограничены при каждом $\lambda > 0$. Тем не менее, при $\lambda > 0$ справедлива оценка $\|R(\lambda, A)\| \geqslant \sup\limits_n \left(n^{\frac{1}{2}} \dfrac{n}{(\lambda + n + 1)^2 + n^2} \right) \geqslant \dfrac{1}{10(\lambda + 1)^{\frac{1}{2}}}$. Следовательно оператор A не порождает полугруппу, суммируемую по Абелю. Однако, в силу оценки, $\|t^{\frac{1}{2}} U(t)\| \leqslant \sup\limits_n \left(t^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} e^{-(n+1)t} \right) \leqslant \dfrac{1}{4} e^{-(t + \frac{1}{2})} \leqslant \dfrac{1}{4}$, полугруппа $\{U(t), t \geqslant 0\}$ является полугруппой роста $\frac{1}{2}$.

Пусть теперь X — пространство пар $\{x_n, y_n\}$ таких что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$ и нормой пространства $\|\{x_n, y_n\}\| = \sup_n |x_n| + (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, область определения оператора A опеределена как

$$Dom\, A = \{\{(x_n, y_n)\} \in X : \lim_{n\to\infty} |ie^n x_n - n y_n| = 0, \sum_{n=1}^{\infty} |n x_n + ie^n y_n|^2 < \infty\},$$

а сам оператор $A\{x_n, y_n\} := \{ie^n x_n - n y_n,\ n x_n + ie^n y_n\}$ на $Dom\, A$.

Рассмотрим $U(t) = e^{At} = \{e^{ie^{nt}}((x_n \cos nt = y_n \sin nt), e^{ie^{nt}}((y_n \cos nt + x_n \sin nt)\}$. Оператор A линеен и замкнут. Тогда $(\lambda I - A)^{-1}\{x_n, y_n\} = \begin{pmatrix} \lambda - ie^n & n \\ -n & \lambda - ie^n \end{pmatrix}^{-1} = \{\alpha_n(\lambda) x_n - \beta_n(\lambda) y_n,\ \alpha_n(\lambda) y_n + \beta_n(\lambda) x_n\}$, где $\alpha_n(\lambda) = \dfrac{\lambda - ie^n}{(\lambda - ie^n)^2 + n^2}$, $\beta_n(\lambda) = \dfrac{n}{(\lambda - ie^n)^2 + n^2}$. Оператор $(\lambda I – A)^{-1}(\lambda)$ ограничен при $\Re\lambda > 1$, следовательно является резольвентой A. Выполнены условия резольвенты генератора интегрированной полугруппы.

Теперь покажем, что операторы $U(t)$ неограничены не только в окрестности нуля, но и в каждой точке несоизмеримой с 2π. Пусть t_0 несоизмеримо с 2π. Тогда существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что: $|\sin n_k t_0| \geqslant \frac{1}{2}, k = 1, 2, \dots$; принимающая значения $x_n = k^{-\frac{1}{2}}$ при $n = n_k$ и $x_n = 0$ для других значений n, и принимающая значения $y_n = 0$ для всех n. Тогда $\|U(t_0)x\| \geqslant \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = \infty$. Таким образом, семейство $\{U(t), t \geqslant 0\}$ имеет особенность не только при $t = 0$, а в бесконечном количестве точек. Следовательно $\{U(t), t \geqslant 0\}$ не является сильно непрерывной полугруппой в бесконечном количестве точек. Тем не менее проинтегрированное семейство $\left\{\int\limits_0^t U(s)ds, t > 0\right\}$ уже является сильно непрерывным при $t \geqslant 0$ и образует 1-раз интегрированную полугруппу.

Список литературы

1. Мельникова И. В. Абстрактная задача Коши в пространствах стохастических распределений / И. В. Мельникова, А. И. Филинков // Труды Четвертой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. – Ч. 2, СМФН, 16, РУДН. – М., 2006. – С. 96–109.
2. Функциональный анализ / ред. С. Г. Крейн. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1972. – 544 с. – (Справочная математическая библиотека).
3. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М. : Иностр. лит., 1962. – 830 с.
4. Melnikova I. V. Relations between modern and classical semigroups / I. V. Melnikova, I. A. Freyberg // 2006.
5. Oharu S. Semigroups of Linear Operators in a Banach Space / S. Oharu // Publ. RIMS, Kyoto Univ. – 1971/72. – N 7. – P. 205–260.
6. Okazawa N. A Generation theorem for semigroups of growth order α / N. Okazawa // Tôhoku Math. Journ. – 1974. – N 26. – P. 39–51.
7. Tanaka N. Local C-semigroups and local integrated semigroups / N. Tanaka, N. Okazawa // Proc. London Math. Soc. – 1990. – Vol. 61, N 3. – P. 63–90.

Парфененкова Валентина Сергеевна, аспирант, Институт математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19 тел.: (343)3754444
(e-mail: `vika8887@e1.ru`)

V. S. Parfenenkova Classification of Solution Operators Semigroups for Abstract Cauchy Problems

Abstract. The paper is devoted to studying solution operators semigroups and its generators for abstract Cauchy problem in Banach space. It is considered two types of families — "classical" that defined on whole Banach space and possesses the semigroup property, and "regularized" that can be defined on some subspace, it doesn't possess the semigroup property but some their transformation possesses. Among the classical semigroups are considered semigroups of class C_0, Cesaro-summable and Abel-summable semigroups, semigroups of classes C_k and $\mathfrak{C}_k$, semigroups of growth α. Among the regularized semigroups are considered integrated semigroups, R-semigroups, convoluted semigroups. For each kind of regularized semigroups it's described the regularization method that allows to consider the amended semigroup property defined on whole Banach space. Also for each kind of regularized semigroups are considered the definition of its generator and in addition the exponentially bounded and local versions of semigroups.

The paper deduces the diagram of solution operators semigroups inclusions. Implications that involve regularized semigroups are by embedding of generators. Implication with pair of classical semigroups are by embedding of semigroups themeselves and as a consequence by embedding of generators too. Particular attention is paid for giving an examples that prove strictness for some embeddings. For the simplicity of the main diagram the relationship between Abel-summable semigroups (i.e. semigroups of classes Ab, $(0, Ab)$, $(1, Ab)$) and their relationship with semigroups of class C_k are taken out into separate diagram.

Keywords: abstract Cauchy problem, solution operators Semigroup, generator of semigroup.

References

1. Krein M.G. (ed.) Functional analysis, 2nd edition (in Russian). Nauka, Moscow, 1972, 544 p.
2. Hille E., Phillips R. Functional Analysis and Semi-Groups (in Russian). *Izdatelstvo Inostrannoj Literatury.* Moscow, 1962, 830 p.
3. Melnikova I.V., Freyberg I.A. Relations between modern and classical semigroups. 2006.
4. Oharu. S. Semigroups of Linear Operators in a Banach Space. *Publ. RIMS*, Kyoto Univ., no. 7, 1971/72, pp. 205-260.
5. Okazawa N. A Generation theorem for semigroups of growth order α. *Tôhoku Math. Journ.*, 1974, no 26, pp. 39-51.
6. Tanaka N., Okazawa N. Local C-semigroups and local integrated semigroups. *Proc. London Math. Soc.*, 1990, vol. 61, no 3, pp. 63-90.

Parfenenkova Valentina Sergeevna, Postraduate, Ural Federal University, 19, Mira st., Ekaterinburg, 620002 Phone: (343)3754444
(e-mail: vika8887@e1.ru)