Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 1. С. 2—8

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.9

Задача Шоуолтера – Сидорова для модели Хоффа на геометрическом графе

А. А. Баязитова
Южно-Уральский государственный университет

Аннотация. В работе исследована задача Шоуолтера – Сидорова для обобщенных уравнений Хоффа, заданных на конечном связном ориентированном графе. Исследована морфология фазового пространства, и найдены достаточные условия, при которых задача Шоуолтера – Сидорова имеет единственное решение.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, фазовое пространство, задача Шоуолтера – Сидорова, уравнение Хоффа.

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ — множество ребер, причем каждому ребру E_j поставлены в соответствие два положительных числа l_j, $d_j \in \mathbb{R}_+$, которые в контексте нашей задачи будут иметь физический смысл длины и площади поперечного сечения ребра соответственно. На каждом ребре E_j задается уравнение Хоффа

$$\lambda_j u_{jt} + u_{jxxt} = \alpha_{1j} u_j + \alpha_{2j} u_j^3 + ... + \alpha_{nj} u_j^{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.1}$$

моделирующее выпучивание двутавровой балки, где параметр $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ соответствует нагрузке на балку, а параметры $\alpha_{sj} \in \mathbb{R}$, $s = 1, 2, ..., n$ характеризуют свойства материала j-й балки; переменные $x \in (0, l_j)$, $t \in \mathbb{R}$.

Для уравнений 0.1 в каждой вершине графа зададим условия

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_p(l_p,t) \tag{0.2}$$

$$\sum_j d_j u_{jx}(0,t) - \sum_m d_m u_{mx}(l_m,t) = 0, \tag{0.3}$$

где $E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i)$, $E_m, E_p \in E^{\omega}(V_i)$, $t \in \mathbb{R}$. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине V_i. Условие (0.2) требует, чтобы вектор-функция $u = u(x,t)$ была непрерывной в вершинах графа. Отметим, что в контексте этого условия выражения «отсутствовать» и «быть равным нулю» имеют различный смысл. Например, если в вершину V_i все ребра входят, то левые два равенства в (0.2) именно «отсутствуют», а не «равны нулю». Условия (0.3) — аналог условий Кирхгоффа — превращаются в условия Неймана, если граф $\mathbf{G}$ состоит из единственного ребра и двух вершин, причем условия (0.2) в данном случае «отсутствуют». Если же граф $\mathbf{G}$ состоит из единственного ребра и единственной вершины, то условия (0.2), (0.3) превращаются в условия согласования. Кроме того искомые компоненты должны удовлетворять начальным условиям Шоуолтера – Сидорова

$$\left(\lambda_j + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(u_j(x,0) - u_{j0}(x)) = 0, \quad x \in (0, l_j). \tag{0.4}$$

Начально-краевая задача (0.1) – (0.4) описана дифференциальными уравнениями с частными производными, заданными на графе, и представляет собой модель для изучения поведения нагруженной конструкции из двутавровых балок.

Дифференциальные уравнения на графах — сравнительно новая область математики, возникшая в конце прошлого века. Первая монография по этой проблематике вышла в 2004 г. [3]. Уравнение Хоффа относится к уравнениям соболевского типа, исследования которых в настоящее время переживают пору бурного расцвета (см. исторический обзор в [6]). Уравнения соболевского типа на графах впервые рассмотрены в [7]. Первое диссертационное исследование в этом направлении было выполнено в 2002–2005 гг. [9]. Обобщенная задача Шоуолтера-Сидорова для уравнений соболевского типа на графе была рассмотрена в [4]. Наконец, в [8] изучена задача (0.1)–(0.3) в предположении $n = 2$. Задача (0.1)–(0.4) в такой постановке рассматривается впервые.

Статья организована следующим образом. В п.1 изложена редукция задачи (0.1)–(0.4) к задаче Шоуолтера – Сидорова для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа. В п.2. приведен основной результат – описание фазового пространства.

1. Редукция задачи

Введем в рассмотрение множество $\mathbf{L_2(G)} = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...), g_j \in L_2(0, l_j)\}$. $\mathbf{L_2(G)}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle g, h\rangle = \sum_j d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx.$$

Через $\mathfrak{U}$ обозначим множество $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено (0.2)$\}$. Множество $\mathfrak{U}$ является банаховым пространством с нормой

$$||u||^2_{\mathfrak{U}} = \sum_j d_j \int_0^{l_j} (u^2_{jx} + u^2_j)dx.$$

Отметим, что условие (0.2) имеет смысл в силу абсолютной непрерывности компонентов u_j, а пространство $\mathfrak{U}$ плотно и компактно вложено в $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ сопряженное к $\mathfrak{U}$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ банахово пространство. Очевидна плотность и компактность вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Формулой

$$\langle Au, v\rangle = \sum_j d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx}v_{jx} + a_j u_j v_j)dx, \quad u, v \in \mathfrak{U}$$

определим оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, где $a_j \in \mathbb{R}_+$ – произвольные константы.

Теорема 1. [1] *Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем спектр $\sigma(A)$ оператора A положителен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.*

Теперь построим операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$

$$\langle Lu, v\rangle = \sum_j d_j(\lambda_j + a_j) \int_0^{l_j} u_j v_j dx - \langle Au, v\rangle,$$

$$\langle Mu, v\rangle = \sum_j \alpha_{1j} d_j \int_0^{l_j} u_j v_j dx.$$

Очевидно, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т. е. линейны и непрерывны), причем оператор L фредгольмов (т. е. $\mathrm{ind\ L} = 0$), а оператор M компактен. Напомним (см. [10], гл. 4), что оператор M называется $(L, 0)$-ограниченным, если он (L, σ)-ограничен, и точка ∞ является устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M.

Лемма 1. [8] *Оператор M $(L, 0)$-ограничен, если*
(i) $\ker L = 0$;
(ii) $\ker L \neq \{0\}$, *$\alpha_{1j} \neq 0$ при любом j и все α_{1j} имеют одинаковый знак.*

Теперь построим оператор

$$\langle N(u), v\rangle = \sum_j d_j(\alpha_{2j} \int_0^{l_j} u^3_j v_j dx + \alpha_{3j} \int_0^{l_j} u^5_j v_j dx + ...$$

$$... + \alpha_{nj} \int_0^{l_j} u^{2n-1}_j v_j dx)$$

и убедимся, что он действует из пространства $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$. Для этого построим вспомогательное пространство $\mathbf{L_{2n}(G)} = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_{2n}(0, l_j)\}$. Очевидно, имеют место плотные и непрерывные вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L_{2n}(G)} \hookrightarrow \mathbf{L_2(G)}$. Обозначим через $\mathbf{L^*_{2n}(G)}$ сопряженное к $\mathbf{L_{2n}(G)}$ относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространство. Пространство $\mathbf{L^*_{2n}(G)}$ топлинейно изоморфно пространству

$$\mathbf{L_{\frac{2n}{2n-1}}(G)} = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_{\frac{2n}{2n-1}}(0, l_j)\}.$$

Норма в пространствах $\mathbf{L_p(G)}$ задается следующим образом:

$$||u||_p = \sum_j d_j \left(\int\limits_0^{l_j} |u_j|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому в силу неравенства Гельдера и непрерывности вложений $L_{2n}(0, l_j) \hookrightarrow L_{2s}(0, l_j) \hookrightarrow L_2(0, l_j)$, $s = 1, 2, ..., n$ получим

$$|\langle N(u), v\rangle| \leq c_1 \max_j\{|\alpha_{2j}|\}\ ||u||^3_{2n}\ ||v||_{2n} + c_2 \max_j\{|\alpha_{3j}|\}\ ||u||^5_{2n}\ ||v||_{2n} + ...$$
$$... + c_{n-1} \max_j\{|\alpha_{nj}|\}\ ||u||^{2n-1}_{2n}\ ||v||_{2n},$$

где константы $c_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, ..., n-1$ и не зависят ни от u, ни от v, т. е. действие оператора $N : \mathbf{L_{2n}(G)} \to \mathbf{L_{\frac{2n}{2n-1}}(G)}$ имеет место. Действие оператора $N : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ имеет место в силу вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L_{2n}(G)}$, из которого вытекает вложение $\mathbf{L_{\frac{2n}{2n-1}}(G)} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Лемма 2. *При любых $\alpha_{2j}, \alpha_{3j}, ..., \alpha_{nj} \in \mathbb{R}$ оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.*

Доказательство. Фиксируем точку $u \in \mathfrak{U}$ и рассмотрим производную Фреше N'_u оператора N в точке u,

$$\langle N'_u(v), w\rangle = 3 \sum_j \alpha_{2j} d_j \int_0^{l_j} u_j^2 v_j w_j dx + 5 \sum_j \alpha_{3j} d_j \int_0^{l_j} u_j^4 v_j w_j dx + ...$$
$$... + (2n-1) \sum_j \alpha_{nj} d_j \int_0^{l_j} u_j^{2n-2} v_j w_j dx.$$

Отсюда аналогично предыдущему

$$|\langle N'_u(v), w\rangle| \leq 3C_1 \max_j\{|\alpha_{2j}|\}||u||^2_{2n}||v||_{2n}\ ||w||_{2n} + ...$$
$$+ ...C_n \cdot (2n-1) \max_j\{|\alpha_{nj}|\}||u||^{2n-2}_{2n}||v||_{2n}\ ||w||_{2n},$$

где константы $C_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, ..., n-1$ и не зависят от u, v и w, т. е. $N'_u \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ при фиксированном u. Непрерывность со второй по $(2n-1)$-ую производных Фреше включительно доказывается аналогично, остальные производные равны нулю. Лемма доказана. □

Итак, мы редуцировали задачу (0.1)–(0.4) к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$L(u(0) - u_0) = 0, \tag{1.1}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{1.2}$$

2. Фазовое пространство

Выберем в ядре $\ker L$ ортонормированный (в смысле $\langle \cdot, \cdot \rangle$) базис, т. е. $\ker L = \operatorname{span}\{\chi_k : k = 1, 2, ..., l\}$, и отождествим его с базисом в $\operatorname{coker} L$. Так как $\mathfrak{U}^0 = \ker L$, то все решения уравнений (0.1) будут с необходимостью лежать во множестве

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle Mu + N(u), \chi_k \rangle = 0, k = 1, 2, ..., l\}$$

как траектория. Найдем условия, при которых множество $\mathfrak{M}$ будет фазовым пространством уравнения (0.1).

Лемма 3. *Пусть выполнено условие (ii) леммы 1 и все ненулевые α_{sj}, $s = 2, ..., n$ имеют тот же знак, что и α_{1j}. Тогда множество $\mathfrak{M}$ — простое многообразие.*

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 1.3 статьи [8], если в качестве вспомогательного оператора рассмотреть следующий гладкий оператор $S : \ker L \to \ker L$(в предположении, что все $\alpha_{sj} \in \mathbb{R}_+$):

$$S(u^0) = \sum_{k=1}^{l} \langle (M + N)(u^1 + u^0), \chi_k \rangle \chi_k.$$

Сначала доказываются строгая монотонность и коэрцитивность оператора S, т. е. $\langle S(u^0) - S(v^0), u^0 - v^0 \rangle > 0$, если $u^0 \neq v^0$ и $\lim\limits_{||u^0||_{\mathfrak{U}} \to \infty} \frac{\langle S(u^0), u^0 \rangle}{||u^0||_{\mathfrak{U}}} = +\infty$. В силу теоремы Вишика-Минти-Браудера [2], гл. III, § 2, следует существование единственного решения уравнения $S(u^0) = 0$. Это в свою очередь означает, что для любого вектора $u^1 \in \operatorname{coim} L$ существует единственный вектор $u^0 \in \ker L$ такой, что $u^0 + u^1 \in \mathfrak{M}$. Далее проверяется невырожденность оператора $S'_{u_0}(v_0)$ в точке $u_0 \in \mathfrak{M}$:

$$\langle S'_{u_0}(v_0), v_0 \rangle > 0, \quad v_0 \in \ker L \backslash \{0\}.$$

Если $\alpha_j \in \mathbb{R}_-$, то для доказательства леммы вместо оператора S надо взять оператор $T = -S$.

Теорема 2. *Пусть*

(i) $\ker L = \{0\}$. *Тогда для любого* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *существует единственное решение задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнений (0.1).*

(ii) $\ker L \neq \{0\}$ *и все коэффициенты* $\alpha_{sj} \neq \{0\}$, $s = 1, ..., n$ *имеют одинаковый знак. Тогда для любого* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *существует единственное решение задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнений (0.1).*

Приведем набросок доказательства. Утверждение (i) очевидно, так как в этом случае существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (детали см. в замечании 4.1.1. [10]). Существование единственного локального решения $u \in C^1((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$ задачи (1.1)–(1.2) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ – результат классической теоремы Коши (см., например, [5], Гл. 4, § 1).

(ii) Пусть ker $L \neq \{0\}$. Тогда в силу условий леммы 3 фазовым пространством уравнения (0.1) является простое многообразие $\mathfrak{M}$. Поэтому любое решение задачи (1.1) совпадает с решением задачи Коши $u(0) = v_0$, где v_0 – проекция вектора u_0 на $\mathfrak{M}$ вдоль ker L, тем самым задача сведена к (i).

Замечание 1. Коэффициенты λ_j входят в условия теоремы 2 неявным образом, т.к. именно они определяют тривиальность или нетривиальность ядра $\ker L$.

Список литературы

1. Баязитова А. А. Задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе / А. А. Баязитова // Вестн. ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16(192). С. 4–10.
2. Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978.
3. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров. – М. : Физматлит, 2004. – 272 с.
4. Загребина С. А. Задача Шоуолтера – Сидорова для уравнения соболевского типа на графе / С.А. Загребина // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск, 2006. – № 1(12). – С. 42–49.
5. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – Волгоград : Платон, 1996.
6. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – М. : Физматлит, 2007.
7. Свиридюк Г. А. Уравнения соболевского типа на графах / Г. А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск : ИМ СО РАН, 2002. – С. 221–225.
8. Свиридюк Г. А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе / Г. А. Свиридюк, А. А. Баязитова // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2009. – № 1(18). С. 6–17.

9. Шеметова В. В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах : дис. ... канд. физ.-мат. наук. / В. В. Шеметова. – Магнитогорск, 2005.
10. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht ; Boston ; Tokyo: VSP, 2003.

A. A. Bayazitova

The Showalter – Sidorov problem for the Hoff model on a geometric graph

Abstract. The Showalter – Sidorov problem for the generalized Hoff equations given on a finite connected oriented graph is investigated in this paper. The morphology of the phase space is investigated and conditions under which the Showalter – Sidorov problem has a uniqueness solution are found.

Keywords: Sobolev type equation, phase space, the Showalter – Sidorov problem, Hoff equation

Баязитова Альфия Адыгамовна, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76, тел.: (351)2679339 (alfiya@74.ru)

Bayazitova Alfiya, South Ural State University, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, 454080, Phone: (351)2679339 (alfiya@74.ru)