Серия «Математика»
2018. Т. 25. С. 159—169

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.929.4
MSC 34K20
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.25.159

Об устойчивости решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием*

Т. К. Ыскак
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается один класс систем линейных неавтономных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием. Матрица перед производной неизвестной вектор-функции с запаздыванием постоянна, матрица перед неизвестной вектор-функцией имеет непрерывные T-периодические элементы, ядро интегрального оператора состоит из непрерывных функций, T-периодических по аргументу t. Цель работы заключается в исследовании асимптотической устойчивости нулевого решения с использованием метода модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского. Метод функционалов Ляпунова – Красовского является развитием второго метода Ляпунова. Достоинством этого метода является простота формулировок и сведение исследования асимптотической устойчивости к решению хорошо обусловленных задач. Кроме того, метод модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского позволяет получить оценки на решения линейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Заметим, что использование модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского также позволяет получить оценки решений нелинейных дифференциальных уравнений и оценки на множество притяжения. Ранее система периодических дифференциальных уравнений нейтрального типа рассматривалась в работах Г. В. Демиденко и И. И. Матвеевой, в которых были получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения и указаны оценки решений этой системы. Система линейных периодических дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием рассматривалось автором статьи. Для этой системы также были получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения и указаны оценки решений. В настоящей работе получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы нейтрального типа с распределенным запаздыванием в терминах матричных неравенств и уста-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-31-00408.

новлены оценки решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, функционал Ляпунова – Красовского, распределенное запаздывание, уравнение нейтрального типа.

1. Введение

Начало теории функционально-дифференциальных уравнений было положено в 50-х годах прошлого века в работах [5; 6]. Вопросам устойчивости функционально-дифференциальных уравнений посвящено множество монографий и статей, отметим лишь несколько из них [1; 2; 4; 5; 7; 8; 10].

В данной работе рассматривается следующая система нейтрального типа с распределенным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big)=A(t)y(t)+\int\limits_{t-\tau}^{t}B(t,t-s)y(s)ds,\quad t>0,\tag{1.1}$$

где $\tau>0$ — запаздывание, D — квадратная матрица порядка n, $A(t)$ — квадратная матрица порядка n с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,\xi)$ — квадратная матрица порядка n с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е. $B(t,\xi)\equiv B(t+T,\xi)$.

Цель работы заключается в исследовании асимптотической устойчивости нулевого решения и получении оценки решений исследуемой системы, которая характеризует скорость убывания при $t\to\infty$. При исследовании асимптотической устойчивости нулевого решения будем использовать следующую модификацию функционала Ляпунова – Красовского, введенную в [3; 9]

$$V(t,y)=\langle H(t)\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big),\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big)\rangle$$
$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,dsd\eta+\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle M(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds.\tag{1.2}$$

В работах [3;9;11] исследован случай дифференциального уравнения нейтрального типа с запаздыванием. В [12] рассмотрена система (1.1) в случае $D=0$.

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. Г. В. Демиденко, к.ф.-м.н. И. И. Матвеевой и к.ф.-м.н. М. А. Скворцовой за внимание и ценные советы.

2. Основная часть

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1) при $t > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\big(y(t) + Dy(t-\tau)\big) = A(t)y(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0). \end{cases} \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$ такая, что $H(t) > 0$ и матрицы $K(s) = K^*(s)$, $M(s) = M^*(s) \in C^1[0, \tau]$ такие, что*

$$K(s) > 0,\ \frac{d}{ds}K(s) < 0,\ M(s) > 0,\ \frac{d}{ds}M(s) < 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Обозначим через $q(t)$ минимальное собственное число матрицы

$$Q(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)\Bigg(Q_{11}(t) - Q_{12}(t)Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)$$

$$- \int\limits_{t-\tau}^{t} Q_{13}(t,s)Q_{33}^{-1}(t,s)Q_{13}^*(t,s)ds\Bigg)H^{-\frac{1}{2}}(t),$$

где

$$Q_{11}(t) = -\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + M(0) + \tau K(0)\right),$$

$$Q_{12}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}(H(t)A(t) + M(0))D + \sqrt{\tau}K(0)D,$$

$$Q_{13}(t,s) = -H(t)B(t, t-s),$$

$$Q_{22} = \frac{1}{\tau}(M(\tau) - D^*M(0)D) - D^*K(0)D > 0,$$

$$Q_{33}(t,s) = K(t-s).$$

Выберем число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0,\ \frac{d}{ds}M(s) + kM(s) \le 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Тогда для решения задачи (2.1) верна следующая оценка

$$V(t,y) \le \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma(s)ds\right)$$

$$\times\Bigg(\langle H(0)(\varphi(0)+D\varphi(-\tau)),(\varphi(0)+D\varphi(-\tau))\rangle$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_{-\eta}^0\langle K(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle\,dsd\eta+\int\limits_{-\tau}^0\langle M(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle\,ds\Bigg),\qquad(2.2)$$

где

$$\gamma(t)=\min\left\{q(t),k\right\}.$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1). Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского (1.2) на решении $y(t)$. Его производная будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}V(t,y)$$

$$=\left\langle\left(\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^*(t)H(t)+\tau K(0)+M(0)\right)y(t),y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle y(t),\left(\frac{d}{dt}H(t)D+A^*H(t)D\right)y(t-\tau)\right\rangle$$

$$+\left\langle y(t),H(t)\int\limits_{t-\tau}^t B(t,t-s)y(s)ds\right\rangle$$

$$+\left\langle\left(\frac{d}{dt}H(t)D+A^*H(t)D\right)y(t-\tau),y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle\left(D^*\frac{d}{dt}H(t)D-M(\tau)\right)y(t-\tau),y(t-\tau)\right\rangle$$

$$+\left\langle y(t-\tau),D^*H(t)\int\limits_{t-\tau}^t B(t,t-s)y(s)ds\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)\int\limits_{t-\tau}^t B(t,t-s)y(s)ds,y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle D^*H(t)\int\limits_{t-\tau}^t B(t,t-s)y(s)ds,y(t-\tau)\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^t\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds+\int\limits_0^\tau\int\limits_{t-\eta}^t\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle\,dsd\eta$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds.$$

Перепишем данное тождество в терминах квадратичной формы

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle C(t,s)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ y(s)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds$$

$$=\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds, \tag{2.3}$$

где

$$C(t,s)=-\begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) & C_{13}(t,s)\\ C_{12}^{*}(t) & C_{22}(t) & C_{23}(t,s)\\ C_{13}^{*}(t,s) & C_{23}^{*}(t,s) & C_{33}(t,s)\end{pmatrix},$$

$$C_{11}(t)=\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^{*}(t)H(t)+\tau K(0)+M(0)\right),$$

$$C_{12}(t)=\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t)D+A^{*}H(t)D\right),$$

$$C_{13}(t,s)=H(t)B(t,t-s),$$

$$C_{22}(t)=\frac{1}{\tau}\left(D^{*}\frac{d}{dt}H(t)D-M(\tau)\right),$$

$$C_{23}(t,s)=D^{*}H(t)B(t,t-s),$$

$$C_{33}(t,s)=-K(t-s).$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего тождества:

$$\left\langle C(t,s)\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle O(t,s)\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle,$$

где

$$O(t,s)=\begin{pmatrix} O_{11}(t) & O_{12}(t) & O_{13}(t,s)\\ O_{12}^{*}(t) & O_{22} & 0\\ O_{13}^{*}(t,s) & 0 & O_{33}(t,s)\end{pmatrix},$$

$$O_{11}(t)=-\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^{*}(t)H(t)+M(0)\right)-K(0),$$

$$O_{12}(t)=\frac{1}{\tau}(H(t)A(t)+M(0))D+K(0)D,$$
$$O_{13}(t,s)=-H(t)B(t,t-s),$$
$$O_{22}=\frac{1}{\tau}(M(\tau)-D^*M(0)D)-D^*K(0)D,$$
$$O_{33}(t,s)=K(t-s).$$

Действительно,

$$\left\langle C(t,s)\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$=\left\langle C(t,s)\begin{pmatrix} I & -D & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} I & -D & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Следовательно,

$$\left\langle C(t,s)\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$=\left\langle \begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ -D^* & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}C(t,s)\begin{pmatrix} I & -D & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Перемножив матрицы, получим указанное тождество.

В силу того, что $O_{22}, O_{33}(t,s)>0$, имеет место следующее представление

$$\left\langle \begin{pmatrix} O_{11}(t) & O_{12}(t) & O_{13}(t,s)\\ O_{12}^*(t) & O_{22} & 0\\ O_{13}^*(t,s) & 0 & O_{33}(t,s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$=\langle (O_{11}(t)-O_{12}(t)O_{22}^{-1}O_{12}^*(t)-O_{13}(t,s)O_{33}^{-1}(t,s)O_{13}^*(t,s))z_1,z_1\rangle$$
$$+\langle O_{22}^{-1}(Q_{22}z_2+O_{12}^*(t)z_1),(O_{22}z_2+O_{12}^*(t)z_1)\rangle$$
$$+\langle O_{33}^{-1}(t,s)(O_{33}(t,s)z_3+O_{13}^*(t,s)z_1),(O_{33}(t,s)z_3+O_{13,s}^*(t,s)z_1)\rangle.$$

Следовательно, из (2.3) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le -\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle [O_{11}(t)-O_{12}(t)O_{22}^{-1}(t)O_{12}^*(t)$$
$$-O_{13}(t,s)O_{33}^{-1}(t,s)O_{13}^*(t,s)](y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle ds$$
$$+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds,$$

или

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\langle Q(t)H^{\frac{1}{2}}(t)(y(t)+Dy(t-\tau)), H^{\frac{1}{2}}(t)(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle$$

$$+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta + \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds.$$

Из определения $q(t)$, k и $\gamma(t)$ следует справедливость следующего неравенства

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\gamma(t)V(t,y) \leq 0.$$

Домножив обе части неравенства на $\exp\left(\int\limits_0^t \gamma(s)ds\right)$ и проинтегрировав, получим оценку (2.2).

□

Замечание 1. Нетрудно увидеть, что функция $\gamma(t)$ является T-периодической.

Отметим, что выполнение условий теоремы 1 (точнее условий на матрицы Q_{22}, $K(s)$, $M(s)$) влечет принадлежность спектра матрицы D единичному кругу. Согласно критерию Ляпунова спектр матрицы D лежит в единичном круге тогда и только тогда, когда существует решение L в классе положительно определенных эрмитовых матриц дискретного уравнения Ляпунова

$$L - D^*LD = C, \quad C = C^* > 0.$$

Введем обозначения

$$\hat{\kappa} = \max_{\xi\in[0,T]} \|H^{-1}(\xi)\|^{1/2}$$

$$\times\left(2\|H(0)\|(1+\|D\|^2) + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{\eta}\|K(s)\|\,dsd\eta + \int\limits_0^{\tau}\|M(s)\|\,ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha = \exp\left(\max_{\xi\in[0,T]}\left(\frac{\xi}{T}\int\limits_0^T \frac{\gamma(s)}{2}ds - \int\limits_0^{\xi}\frac{\gamma(s)}{2}ds\right)\right).$$

В следующей теореме мы установим оценки решения начальной задачи (2.1), являющиеся аналогами оценок из [3; 9; 11].

Теорема 2. *Пусть*
а) выполнены условия теоремы 1,
б) l — такое минимальное число, что $\|D^l\| < 1$,
в) $\Delta = \int\limits_0^T \frac{\gamma(s)}{2T} ds > 0$.

1. Если $\|D^l\| \exp(\Delta l\tau) < 1$, то для решения задачи (2.1) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Bigg(\hat{\kappa}\alpha(1 - \|D^l\|e^{\Delta l\tau})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{\Delta j\tau}$$

$$+ \max\{\|D\|e^{\Delta\tau}, \dots, \|D^l\|e^{\Delta l\tau}\}\Bigg) \max_{t\in[-\tau,0]} |\varphi(t)|e^{-\Delta t}.$$

2. Если $\|D^l\| \exp(\Delta l\tau) = 1$, то для решения задачи (2.1) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi\Bigg(\hat{\kappa}\alpha(1 + \frac{t}{l\tau}) \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{\Delta j\tau}$$

$$+ \max\{\|D\|e^{\Delta\tau}, \dots, \|D^{l-1}\|e^{(l-1)\Delta\tau}, 1\}\Bigg) \max_{t\in[-\tau,0]} |\varphi(t)|e^{-\Delta t}.$$

3. Если $\|D^l\| \exp(\Delta l\tau) > 1$, то для решения задачи (2.1) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Bigg(\hat{\kappa}\alpha\|D^l\|^{-1}(1 - \|D^l\|^{-1}e^{-\Delta l\tau})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{\Delta j\tau}$$

$$+\|D^l\|^{-1} \max\{1, \|D\|, \dots, \|D^{l-1}\|\}\Bigg) \max_{t\in[-\tau,0]} |\varphi(t)| \exp\left(\frac{\ln(\|D^l\|)}{l\tau} t\right).$$

Доказательство этой теоремы проводится по аналогии с доказательством теоремы 6 из [11].

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво.*

3. Заключение

В работе исследована асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1.1). В теореме 2 и следствии 1 получены достаточные условия асимптотической устойчивости в терминах матричных неравенств и указаны три оценки решений системы (1.1) в различных случаях. Данные оценки характеризуют экспоненциальное убывание решений на бесконечности.

Список литературы

1. Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь : Изд-во Перм. ун-та, 2001. 230 с.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М. : Мир, 1967. 548 с.
3. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
4. Колмановский В. В., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М. : Наука, 1981. 448 с.
5. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959. 212 с.
6. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.-Л. : Гостехиздат, 1951. 256 с.
7. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984. 424 с.
8. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971. 296 с.
9. Demidenko G. V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. Vol. 7, N 3. P. 119–130.
10. Hayes N. D. Roots of the Transcendental Equation Associated with a Certain Difference-Differential Equation // J. London Math. Soc. 1950. Vol. 25. P. 226–232. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-25.3.226
11. Yskak T. K. Sufficient conditions for the asymptotic stability of solutions to one class of linear systems of neutral type with periodic coefficients // Динамические системы. 2015. Т. 5(33), № 3–4. С. 177–191.
12. Yskak T. Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Funct. Differ. Equ. 2018. Vol. 24, N 1–2. P. 97–108.

Тимур Кайратулы Ыскак, аспирант, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Российская Федерация, 630090, Новосибирск, пр-т Академика Коптюга, 4; ассистент, Новосибирский государственный университет, Российская Федерация, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2; тел.: 8(913)9196662 (e-mail: istima92@mail.ru)

Поступила в редакцию 10.08.18

On the Stability of Solutions of Neutral Differential Equations with Distributed Delay

T. K. Yskak

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

Abstract. We consider one class of systems of linear nonautonomous differential equations of neutral type with distributed delay. The matrix in front of the derivative of the unknown vector-function with delay is constant, the matrix in front of the unknown vector-function has continuous T-periodic elements, the kernel of the integral operator consists of continuous functions, which are T-periodic with respect to argument t. The aim of the work is to study the asymptotic stability of the zero solution using the method of modified Lyapunov–Krasovskii functionals. The method of Lyapunov–Krasovskii functionals is the development of the Lyapunov second method. The advantage of this method is the simplicity of formulations and the reduction of the study of asymptotic stability to solving well-conditioned problems. In addition, the method of modified Lyapunov–Krasovskii functionals allows to obtain estimates of solutions to linear systems of delay differential equations. Note that the use of modified Lyapunov–Krasovskii functionals also allows to obtain estimates of solutions to nonlinear differential equations and estimates of the attraction set. Previously, a system of periodic differential equations of neutral type was considered in the works by G.V. Demidenko and I.I. Matveeva, where sufficient conditions of the asymptotic stability of the zero solution were obtained and estimates of solutions to this system were established. A system of linear periodic differential equations with distributed delay was considered by the author of this paper. For this system it was also obtained sufficient conditions of the asymptotic stability of the zero solution and established estimates of solutions. In the present paper, we obtain sufficient conditions of the asymptotic stability of the zero solution to the neutral type system with distributed delay in terms of matrix inequalities and establish estimates of solutions to the system characterizing the exponential decay at infinity.

Keywords: asymptotic stability, Lyapunov – Krasovskii functional, distributed delay, neutral type equation.

References

1. Azbelev N.V., Simonov P.M. *Ustoychivost' resheniy uravneniy s obyknovennymi proizvodnymi* [Stability of solutions to equations with ordinary derivatives]. Perm, Izdatelstvo Permskogo universiteta, 2001, 230 p. (in Russian)
2. Bellman R., Cooke K.L. *Differential-difference equations.* London, Academic Press, 1963, 482 p.
3. Demidenko G.V., Matveeva I.I. On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients. *Sib. Math. J.*, 2014, vol. 55, no. 5, pp. 866–881. https://doi.org/10.1134/S0037446614050061
4. Kolmanovskiy V.V., Nosov V.R. *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyh sistem s posledeystviem* [Stability and periodic regimes of controlled systems with aftereffect]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 448 p. (in Russian)
5. Krasovskii N.N. Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay. Stanford, Stanford University Press, 1963, 188 p.
6. Myshkis A.D. *Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear differential equations with retarded argument]. Moscow, Leningrad, Gostehizdat Publ., 1951, 256 p. (in Russian)
7. Hale J. Theory of Functional Differential Equations. New York, Springer, 1977, 366 p. https://www.doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2

Известия Иркутского государственного университета.
2018. Т. 25. Серия «Математика». С. 159–169

8. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. *Vvedenie v teoriyu differentsial'nyh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 296 p. (in Russian)
9. Demidenko G.V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type. *J. Anal. Appl.*, 2009, vol. 7, no. 3, pp. 119–130.
10. Hayes N.D. Roots of the Transcendental Equation Associated with a Certain Difference-Differential Equation. *J. London Math. Soc.*, 1950, vol. 25, pp. 226–232. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-25.3.226
11. Yskak T.K. Sufficient conditions for the asymptotic stability of solutions to one class of linear systems of neutral type with periodic coefficients. *Dinamicheskie Systemy*, 2015, vol. 5(33), no. 3–4, pp. 177–191.
12. Yskak T. Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay. *Funct. Differ. Equ.*, 2018, vol. 24, no. 1–2, pp. 97–108.

Timur Yskak, Postgraduate, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russian Federation; Assistant, Novosibirsk State University, 2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation; tel.: 8(913)9139196662 (e-mail: istima92@mail.ru)

Received 10.08.18